

המכללה האקדמית נתניה

מבחן אמצע סמסטר אינפי א'

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה

זמן המבחן: שעתיים

חומר עזר: מחשבון

ענה על השאלות הבאות:

1. ענה על אחת משני הסעיפים הבאים: (20%)

א: מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{-3x^2-11x+4}} + \sqrt{-2x^2+3-5x}$$

ב: בדוק האם הפונקציה הבאה חד חד ערכית. נמק.

$$f(x) = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x}$$

2. מצא במידה וקיים: סופרמום, אינפימום, מקסימום ומינימום של הקבוצה הבאה: (20%)

$$\left\{ \frac{(-1)^{n+1}(5n-2)}{2n+3} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

3. בדוק את זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה הבאה: (15%)

$$f(x) = \sqrt[3]{(2x^2-5x+7)^2} - \sqrt[3]{(2x^2+5x+7)^2}$$

4. חשב שניים משלושת הגבולות הבאים: (30%)

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 7n + 13}{3n^2 - 5n - 11} \right)^{4n^2 + 3\sqrt{n}}$

ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{5}{(2n-1)!} + \frac{1}{(2n)!} \right)$

6. נסח הוכח את כלל הסנדביץ בסדרות. (15%)

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) הוא $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ב. פירוק הטרינום $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, a^0 = 1,$$

$$(a^x)^y = a^{xy}, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו- $0 < a, a \neq 1$

$$\begin{aligned} \log_a(x \cdot y) &= \log_a x + \log_a y, & \log_a x^y &= y \cdot \log_a x; \\ \log_a(x/y) &= \log_a x - \log_a y, & \log_a \sqrt[y]{x} &= \frac{1}{y} \cdot \log_a x; \\ \log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a}, & \log_a x &= \frac{1}{\log_x a}; \\ a^{\log_a x} &= x, & \ln x &= \log_e x, e = 2.718281828\dots \\ \ln x = a &\Rightarrow x = e^a \end{aligned}$$

5. הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\begin{aligned} (x^a)' &= ax^{a-1}, & (a^x)' &= \ln a \cdot a^x; \\ (\sin x)' &= \cos x, & (e^x)' &= e^x; \\ (\cos x)' &= -\sin x, & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln a}; \\ (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}; \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

7. כללי גזירה

$$\begin{aligned} (a \cdot f(x))' &= a \cdot f'(x); \\ (f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x); \\ (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x); \\ (f(x)g(x)h(x))' &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}; \\ (f(g(x)))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0 dx = C;$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C;$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx;$$

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx;$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

אינטגרציה בחלקים בנוסח אחר:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

א.שטח :

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

.11

א. הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta). \quad :$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

פתרונות

(20%)

1. ענה על אחת משני הסעיפים הבאים:

א: מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{-3x^2-11x+4}} + \sqrt{-2x^2+3-5x}$$

כדי ש f תהיה מוגדרת צריך להתקיים $(0 < -3x^2 - 11x + 4) \wedge (0 \leq -2x^2 + 3 - 5x)$ נפתור כל אי שוויון לחוד.

$$0 < -3x^2 - 11x + 4, x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{2(-3)} = \frac{11 \pm 13}{-6} = -4, \frac{1}{3}, \{x, -4 < x < \frac{1}{3}\}$$

וכמו כן

$$0 < -2x^2 + 3 - 5x, x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2(-2)} = \frac{5 \pm 7}{-4} = -3, \frac{1}{2}, \{x, -3 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$$

וכעת נקבל על ידי חתוך את תחום ההגדרה $\{x, -3 \leq x < \frac{1}{3}\}$

בדוק האם הפונקציה הבאה חד חד ערכית. נמק.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x}, f(a) = f(b) \rightarrow \frac{2}{a-3} + \frac{1}{a} = \frac{2}{b-3} + \frac{1}{b} \rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{2}{a-3} - \frac{2}{b-3} = 0 \rightarrow \\ \frac{b-a}{ab} + \frac{2(b-a)}{(a-3)(b-3)} &= 0 \rightarrow (b-a) \left[\frac{1}{ab} + \frac{2}{(a-3)(b-3)} \right] = 0 \rightarrow (b-a) \frac{(a-3)(b-3) + 2ab}{ab(a-3)(b-3)} = 0 \\ \rightarrow (b-a) \frac{3ab - 3a - 3b + 9}{ab(a-3)(b-3)} &= 0 \rightarrow \frac{3(b-a)(ab - a - b + 3)}{ab(a-3)(b-3)} = 0 \end{aligned}$$

ולכן עבור $ab - a - b + 3 = 0$ נקבל עוד פתרון. נפתר ונקבל

למשל עבור $b=2, a=-1$ $ab - a - b + 3 = 0 \rightarrow a(b-1) = b-3 \rightarrow a = \frac{b-3}{b-1}$ אותו f כלומר f איננה חח"ע.

2. מצא במידה וקיים: סופרמום, אינפימום, מקסימום (20%) ומינימום של הקבוצה הבאה:

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{n+1}(5n-2)}{2n+3} + (-1)^n &= (-1)^{n+1} \left(\frac{5n-2}{2n+3} - 1 \right) = (-1)^{n+1} \frac{3n-5}{2n+3} = (-1)^{n+1} \left(\frac{3n-5}{2n+3} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \right) = \\ (-1)^{n+1} \left(\frac{3n-5}{2n+3} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \right) &= (-1)^{n+1} \left(\frac{3}{2} - \frac{19}{2(2n+3)} \right). \end{aligned}$$

הסדרה $19/[2(2n+3)]$ חיובית ויורדת, ולכן ההפרש $3/2 - 19/[2(2n+3)]$ היא עולה, ערכיה הראשונים הם $0.4, 1/7$ וכדומה, וגבולה הוא 1.5 . לכן סדרה זו בעלת מינימום -0.4 וסופרמום (שהוא גם גבול לפי משפט וירשרס) 1.5 . כאשר מוסיפים את הסימן מקבלים שתי תתי סדרות,

הזוגיים של הסדרה המקורית נשארים במקומותיהם, והאי זוגיים נכפלים במינוס, ולכן הופכים לתת סדרה יורדת שהחסם התחתון שלה הוא 1.5-. לכן לסדרה יש חסם עליון 1.5 ותחתון 1.5-.

3. בדוק את זוגיות-זוגיות הפונקציה הבאה: (15%)

$$f(x) = \sqrt[5]{(2x^2 - 5x + 7)^2} - \sqrt[5]{(2x^2 + 5x + 7)^2}$$

כיון ששורש חמישי מוגדר לכל x , הרי שתחום ההגדרה של f הוא \mathbb{R} , והוא סימטרי, ובנוסף מתקיים

$$f(-x) = \sqrt[5]{(2(-x)^2 - 5(-x) + 7)^2} - \sqrt[5]{(2(-x)^2 + 5(-x) + 7)^2} = \sqrt[5]{(2x^2 + 5x + 7)^2} - \sqrt[5]{(2x^2 - 5x + 7)^2} = -f(x)$$

כלומר הפונקציה היא איזוגית.

4. חשב שניים משלושת הגבולות הבאים: (30%)

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$. נשתמש בכלל המנה, אם $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L, 0 \leq L < 1$, אז

נובע כי $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. ואכן

$$\text{ולכן } a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{(1+1/n)^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{e} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} = 0$$

ב.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 7n + 13}{3n^2 - 5n - 11} \right)^{4n^2 + 3\sqrt{n}}, (a_n - 1)b_n = \left(\frac{3n^2 - 7n + 13}{3n^2 - 5n - 11} - 1 \right) (4n^2 + 3\sqrt{n}) = \left(\frac{-2n + 24}{3n^2 - 5n - 11} \right) (4n^2 + 3\sqrt{n}).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)b_n = -\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 7n + 13}{3n^2 - 5n - 11} \right)^{4n^2 + 3\sqrt{n}} = e^{-\infty} = 0.$$

ג.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{5}{(2n-1)!} + \frac{1}{(2n)!} \right) \cdot \left(\frac{5}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{5}{(2n-1)!} + \frac{1}{(2n)!} \right) &= \\ = \frac{3+2}{1!} + \frac{3-2}{2!} + \frac{3+2}{3!} + \frac{3-2}{4!} + \dots + \frac{3+2}{(2n-1)!} + \frac{3-2}{(2n)!} &= 3 \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(2n-1)!} + \frac{1}{(2n)!} \right) = \\ -2 \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(2n-1)!} - \frac{1}{(2n)!} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{5}{(2n-1)!} + \frac{1}{(2n)!} \right) &= 3e - 2e^{-1} \end{aligned}$$