המכללה האקדמית נתניה

מבחן אמצע סמסטר אינפי א׳ תשע״ג

יום ד ו טבת התשע״ג   19-12-2012

שם המרצה: ד״ר גיורא דולה
זמן המבחן: שעתיים
חומר עזר: מחשבון

<u>ענה על השאלות הבאות:</u>

1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה הבאה: (20%)

$$f(x)=\frac{3x+3}{\sqrt{2x^2-x-1}}+\sqrt{-3x^2-5x-2}+\frac{3x+2}{3x+2}$$

2. חשב את הגבולות הבאים: (60%)

א. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2.5^n\cdot n!}{n^n}$$

ב. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-7}}{\sqrt{4n^2-7}+\sqrt{4n^2-1}}$$

ג. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-9n+7}{2n^2-8n-1}\right)^{2n^2+3n}$$

ד. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\cdots+2012^n}}\right)$$

3. נסח והוכח את משפט הסנדביץ׳.   (20%)
מותר להשתמש בכל משפט אחר שנלמד בכתה, אך יש לנסח אותו בנפרד מההוכחה.

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) הוא $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$a^x a^y = a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$

$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}, \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-x} = \dfrac{b^x}{a^x}, a^0 = 1,$

$\left(a^x\right)^y = a^{xy}, a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו $0 < a, a \neq 1$.

$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$

$\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \cdot \log_a x;$

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \log_a x = \dfrac{1}{\log_x a};$

$a^{\log_a x} = x, \qquad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828\ldots$

$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)'=ax^{a-1}, \qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x, \qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x, \qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x);$$
$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$
$$(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \arctan x + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח :

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V=\pi\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad \sin^2 x+\cos^2 x=1;$$

$$\tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad \tan x\cdot\cot x=1;$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\qquad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad 1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

:

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$$

פתרונות.

תשובה 1

$$f(x)=\frac{3x+3}{\sqrt{2x^2-x-1}}+\sqrt{-3x^2-5x-2}+\frac{3x+2}{3x+2},0\le -3x^2-5x-2=-(x+1)(3x+2)\to\{x\,|-1\le x\le -\frac{2}{3}\},$$
$$0\le 2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)\to\{x\,|,x\le -0.5\}\vee\{x\,|,1\le x\}.$$
$$[\{x\,|,x\le -0.5\}\vee\{x\,|,1\le x\}]\wedge\{x\,|-1\le x\le -\frac{2}{3}\}\wedge\{x\,|\,x\ne -\frac{2}{3}\}=\{x\,|-0.5\le x<-\frac{2}{3}\}.$$

תשובה 2 סעיף א

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2.5^n\cdot n!}{n^n},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2.5^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{2.5^n\cdot n!}=\frac{2.5(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{2.5n^n}{(n+1)^n}=\frac{2.5}{(1+\frac{1}{n})^n},\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2.5}{e}<1$$
$$\to\lim_{n\to\infty}\frac{2.5^n\cdot n!}{n^n}=0.$$

תשובה 2 סעיף ב

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-7}}{\sqrt{4n^2-7}+\sqrt{4n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-7}}{\sqrt{4n^2-7}+\sqrt{4n^2-1}}\frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-7}}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-7}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2)-(n^2-7)}{(\sqrt{4n^2-7}+\sqrt{4n^2-1})(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-7})}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{(\sqrt{4n^2-7}+\sqrt{4n^2-1})(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-7})}=\frac{9}{(\infty+\infty)(\infty+\infty)}=\frac{9}{\infty}=0.$$

תשובה 2 סעיף ג

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2n^2-9n+7}{2n^2-8n-1})^{2n^2+3n}.(f-1)g=(\frac{2n^2-9n+7}{2n^2-8n-1}-1)(2n^2+3n)=\frac{-n+8}{2n^2-8n-1}(2n^2+3n)=$$
$$=\frac{(-n+8)(2n^2+3n)}{2n^2-8n-1}=\frac{(-2n^3+13n^2+16n)}{2n^2-8n-1},\lim_{n\to\infty}((f-1)g)=-\infty,\lim_{n\to\infty}(\frac{2n^2-9n+7}{2n^2-8n-1})^{2n^2+3n}=e^{-\infty}=0$$

תשובה 2 סעיף ד

$$\sqrt[n]{2012^n} \le \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n + \cdots + 2012^n} \le \sqrt[n]{2012^n + 2012^n + 2012^n + \cdots + 2012^n} \to$$

$$2012 \le \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n + \cdots + 2012^n} \le \sqrt[n]{2012 \cdot 2012^n} = 2012\sqrt[n]{2012} \to$$

$$2012 \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n + \cdots + 2012^n} \le 1 \cdot 2012 \to \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n + \cdots + 2012^n}}\right) = \frac{1}{2012}$$