המכללה האקדמית נתניה

מבחן אמצע סמסטר לדוגמא אינפי א' תשע"ג

יום ד ו טבת התשע"ג 19-12-2012

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה
זמן המבחן: שעתיים
חומר עזר: מחשבון

<u>ענה על השאלות הבאות:</u>

1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה הבאה: (20%)

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{-3x^2-11x+4}}+\sqrt{-2x^2+3-5x}$$

2. מצא במידה וקיים: סופרמום, אינפימום, מקסימום ומינימום של הקבוצה הבאה: (20%)

$$\left\{\frac{(-1)^{n+1}(5n-2)}{2n+3}+(-1)^n n\in N\right\}$$

3. חשב את הגבולות הבאים: (40%)

א. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{\underset{n\to\infty}{n^n}}$$

ב. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-7n+13}{3n^2-5n-11}\right)^{4n^2+3\sqrt{n}}$$

ג.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

4. נסח והוכח את משפט האריתמטיקה של גבולות (מקרה החבור בלבד). (20%)

מותר להשתמש בכל משפט אחר שנלמד בכתה, אך יש לנסח אותו בנפרד מההוכחה.

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$
$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x;$$
$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$
$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$
$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \arctan x + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות

1 : מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה הבאה :

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{-3x^2-11x+4}}+\sqrt{-2x^2+3-5x}$$

כדי ש f תהיה מוגדרת צריך להתקיים $(0<-3x^2-11x+4)\wedge(0\le-2x^2+3-5x)$

נפתור כל אי שויון לחוד.

$$0<-3x^2-11x+4, x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{11\pm\sqrt{121+48}}{2(-3)}=\frac{11\pm13}{-6}=-4,\frac{1}{3},\{x,-4<x<\frac{1}{3}\}$$

וכמו כן

$$0<-2x^2+3-5x, x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2(-2)}=\frac{5\pm7}{-4}=-3,\frac{1}{2},\{x,-3\le x\le\frac{1}{2}\}$$

וכעת נקבל על ידי חתוך את תחום ההגדרה $\{x,-3\le x<\frac{1}{3}\}$

2. מצא במידה וקיים : סופרמום, אינפימום, מקסימום ומינימום של הקבוצה הבאה : (20%)

$$\frac{(-1)^{n+1}(5n-2)}{2n+3}+(-1)^{n}=(-1)^{n+1}(\frac{(5n-2)}{2n+3}-1)=(-1)^{n+1}\frac{3n-5}{2n+3}=(-1)^{n+1}(\frac{3n-5}{2n+3}-\frac{3}{2}+\frac{3}{2})=$$
$$(-1)^{n+1}(\frac{3n-5}{2n+3}-\frac{3}{2}+\frac{3}{2})=(-1)^{n+1}(\frac{3}{2}-\frac{19}{2(2n+3)}).$$

הסדרה [19/[2(2n+3 חיובית ויורדת, ולכן ההפרש [3/2-19/[2(2n+3 היא עולה, ערכיה הראשונים הם 0.4,1/7- וכדומה, וגבולה הוא 1.5 . לכן סדרה זו בעלת מינימום 0.4- וסופרמום (שהוא גם גבול לפי משפט וירשרס) 1.5. כאשר מוסיפים את הסימן מקבלים שתי תתי סדרות, הזוגיים של הסדרה המקורית נשארים במקומותיהם, והאי זוגיים נכפלים במינוס, ולכן הופכים לתת סדרה יורדת שהחסם התחתון שלה הוא 1.5-. לכן לסדרה יש חסם עליון 1.5 ותחתון 1.5-.

3. חשב שניים משלושת הגבולות הבאים: (30%)

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$. נשתמש בכלל המנה, אם $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L, 0\le L<1$, אז נובע כי $\exists\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. ואכן

$$a_n=\frac{2^n\cdot n!}{n^n},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{2^n\cdot n!}=\frac{2n^n}{(n+1)^n}=\frac{2}{(1+1/n)^n},\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{e}<1$$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}=0$$

ב.

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{3n^2-7n+13}{3n^2-5n-11})^{4n^2+3\sqrt{n}},(a_n-1)b_n=(\frac{3n^2-7n+13}{3n^2-5n-11}-1)(4n^2+3\sqrt{n})=(\frac{-2n+24}{3n^2-5n-11})(4n^2+3\sqrt{n}).$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)b_n=-\infty,\lim_{n\to\infty}(\frac{3n^2-7n+13}{3n^2-5n-11})^{4n^2+3\sqrt{n}}=e^{-\infty}=0.$$

ג.   ג.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=?,$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2+n}}=\sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}.\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}=1.$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2+1}}=\sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}}.\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}}=1.$$

ולכן: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$