שעורי אינפי א' התשע"ד

שם המורה: ד"ר גיורא דולה

הערה- הקובץ מעודכן למבחן.

משפט

$\sqrt{2}$ איננו רציונלי. נסוח אחר: לכל שני מספרים שלמים m,n (n שונה מ-0), מתקיים כי $\left(\frac{m}{n}\right)^2 \neq 2.$.

הוכחה

ההוכחה מסתמכת על העובדה שכל מספר רציונלי a/b ניתן להצגה בתור שבר c/d, כאשר c,d זרים בזוגות, כלומר המספר היחיד המחלק את c ואת d הוא ±1. להצגה הזו נקרא הצגה זרה.

נניח בשלילה שיש מספר רציונלי שרבועו הוא 2, ונעבור להצגה זרה. אם נגיע לסתירה אז נצטרך לשלול את זה שיש שיש מספר שרש רציונלי ל-2, כלומר כל סתירה תוכיח את המשפט. אז נעבור להצגה זרה של $\sqrt{2}$.
כלומר מניחים שיש טבעיים זרים m,n כך ש $(m/n)^2=2$. נעביר אגפים ונקבל כי $m^2=2n^2$.

קימות עבור m שתי אפשרויות. או שהוא זוגי או אי זוגי. אם m היה איזוגי אז גם m^2 היה אי זוגי. זה היה סותר את השויון $m^2=2n^2$, כיון שאגף ימין מתחלק ב-2.

לכן m חיב להיות זוגי. לכן חיב להיות k טבעי כך שמתקיים m=2k, ולכן $m^2=4k^2$. נציב ונקבל $2n^2=m^2=4k^2$. ולכן נצמצם ונקבל $n^2=2k^2$.

שוב עבור n קימות שתי אפשרויות זוגי ואי זוגי, ולכן הוא חיב להיות זוגי.

קבלנו סתירה כי גם m וגם n חיבים להיות זוגיים, ולכן הם אינם זרים בסתירה לכך שהם נבחרו להיות זרים.

מסקנה שורש 2 הוא איננו מספר רציונלי.

הוכחה כי אקסיומת אוקלידס נובעת מאקסיומת השלמות.

נניח בשלילה כי אקסיומת אוקלידס לא מתקיימת ונגיע למסקנה כי אקסיומת השלמות לא מתקיימת.
ואכן נניח בשלילה כי קימים a,b ממשיים חיוביים כך שלכל n טבעי $na\le b$. נגדיר את הקבוצה $C=\{na, n\in N\}$. אז C קבוצה ממשית ו-b הוא חסם מלעיל שלה, ולכן לפי אקסיומת השלמות יש לה חסם עליון d. אם נראה כי d-a גם הוא חסם מלעיל של C נקבל סתירה כיון ש d אמור להיות קטן ביותר. כיון ש d חסם מלעיל לכל n מתקיים כי $(n+1)a\in C$ ולכן $(n+1)a\le d$ ולכן לכל n מתקיים $na\le d-a$, כלומר אכן d-a חסם מלעיל של C הקטן מ d, סתירה.

טענה

נתון קבוע ממשי c ונתונה הסדרה הקבועה $a_n=c$. אז מתקיים $\exists\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

הוכחה

כיון שלכל n, $a_n-c=0$, הרי שלכל $\varepsilon>0$, אי השויון $|a_n-c|=0<\varepsilon$ מתקיים לכל n, כלומר ללא פסולים.

משפטי אריתמטיקה של גבולות

משפט (חבור)

נתונות שתי סדרות a_n, b_n, ונתון כי $\exists\lim_{n\to\infty} a_n = L, \exists\lim_{n\to\infty} b_n = M$, אז נובע כי $\exists\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = L+M$.

הוכחה

צריך להראות כי $\forall\varepsilon>0, \exists K>0, (n>K)\to(|(a_n+b_n)-(L+M)|<\varepsilon)]$. יהי נתון $\varepsilon>0$. אז לפי הנתון (עבור $\varepsilon/2$) נובע כי קים K_1 כך ש $(n>K_1)\to(|a_n-L|<\varepsilon/2)$. באותה צורה נובע כי קים K_2 כך ש $(n>K_2)\to(|b_n-M|<\varepsilon/2)$. נגדיר $K=\max\{K_1,K_2\}$. אז מתקיים כי

$$(n>K)\to(|a_n-L|<\varepsilon/2)\wedge(|b_n-M|<\varepsilon/2)\to$$
$$(|(a_n+b_n)-(L+M)|=|(a_n-L)+(b_n-M)|\le|(a_n-L)|+|(b_n-M)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon),$$

כדרוש.

משפט (חסור)

נתונות שתי סדרות a_n, b_n, ונתון כי $\exists\lim_{n\to\infty} a_n = L, \exists\lim_{n\to\infty} b_n = M$, אז נובע כי $\exists\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = L - M$.

הוכחה (תרגיל הביתה להגשה)

חסימות סדרה מתכנסת

נתונה סדרה a_n, ונתון כי $\exists\lim_{n\to\infty} a_n = L$, אז נובע כי a_n היא חסומה.

הוכחה

מתקיים לפי ההגדרה $\forall\varepsilon > 0, \exists K > 0, (n > K) \to (|a_n - L| < \varepsilon)$. נבחר $\varepsilon = 1$.
אז $\exists K > 0, (n > K) \to (L - 1 < a_n < L + 1)$. נגדיר $M = Max\{a_1, a_2, \cdots, a_K, L + 1\}$.
אז לכל n מתקיים $a_n \le M$. בצורה דומה נגדיר $J = Min\{a_1, a_2, \cdots, a_K, L - 1\}$.
אז לכל n מתקיים $J \le a_n$. לכן M הוא חסם מלעיל ו J הוא חסם מלרע של הסדרה, והיא אכן חסומה.

משפט (מכפלה)

נתונות שתי סדרות a_n, b_n, ונתון כי $\exists\lim_{n\to\infty} a_n = L, \exists\lim_{n\to\infty} b_n = M$, אז נובע כי $\exists\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = LM$.

הוכחה

צריך להראות כי $\forall\varepsilon > 0, \exists K > 0, (n > K) \to (|(a_n b_n) - (LM)| < \varepsilon)]$. יהי נתון $\varepsilon > 0$ כלשהו. לפי טענה קודמת הסדרה a_n חסומה, ולכן יש מספר חיובי J כך שמתקיים לכל n $-J \le a_n \le J$ או מה ששקול $|a_n \le |J|$. לפי הגדרת הגבול $\exists K_1 > 0, (n > K_1) \to (|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2M})$, וגם לפי הגדרת הגבול $\exists K_2 > 0, (n > K_2) \to (|b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2J})$. נגדיר $K=\max\{K_1,K_2\}$. אז מתקיים כי עבור n>K,

$$|(a_n b_n) - (LM)| = |a_n b_n - a_n M + a_n M - LM| = |a_n(b_n - M) + (a_n - L)M| \le$$
$$|a_n||b_n - M| + |(a_n - L)M| \le J|b_n - M| + M|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2J}J + \frac{\varepsilon}{2M}M = \varepsilon$$

כדרוש.

משפט וירשטרס אודות סדרה מונוטונית

א. נתונה סדרה אשר עולה במובן הרחב וחסומה. אז היא מתכנסת לחסם העליון שלה.

ב. נתונה סדרה אשר יורדת במובן הרחב וחסומה. אז היא מתכנסת לחסם התחתון שלה.

הוכחה

נוכיח רק את א והוכחת ב היא תרגיל להגשה הביתה.

נניח כי a_n היא סדרה עולה במובן הרחב וכי M הוא החסם העליון שלה ויהי נתון $\varepsilon>0$. אז מתקיים $M-\varepsilon<M$, ולכן $M-\varepsilon$ איננו חסם מלעיל של הסדרה ולכן יש איבר של הסדרה, כלומר K טבעי כך שמתקיים $M-\varepsilon<a_K\le M$. אז לפי העליה של הסדרה, לכל n>K מתקיים כי $M-\varepsilon<a_K\le a_n\le M<M+\varepsilon$ כדרוש.

טענה

הסדרה $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ עולה (במובן הרחב).

הוכחה

נביט על n+1 האיברים אשר n מהם שוים ל 1+1/n, והאחרון שוה ל-1. נפעיל עליהם את אי שויון המשולש. אז סכומם הוא n+2, ומכפלתם היא $(1+1/n)^n$. לכן נקבל כי $\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n}\le\frac{n+2}{n+1}\to(1+\frac{1}{n})^n\le(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$, כדרוש.

טענה (עולה על עולה)

נתונות f: A→ B עולה ו- g: B→ C עולה. אז ההרכבה g·f : A→ C היא פונקציה עולה. הטענה נכונה במובן הצר וגם במובן הרחב.

הוכחה

מתקיים כי (p<q)→(f(p)<f(q)) ו מתקיים כי (p<q)→(g(p)<g(q)). אז מתקיים כי (p<q)→(f(p)<f(q)) →(g(f(p))<g(f(q))) כדרוש.

טענה (עולה על יורדת)

נתונות $f: A\to B$ יורדת ו- $g: B\to C$ עולה. אז ההרכבה $g\cdot f : A\to C$ היא פונקציה יורדת. הטענה נכונה במובן הצר וגם במובן הרחב.

הוכחה (תרגיל הביתה)

טענה (יורדת על עולה)

נתונות $f: A\to B$ עולה ו- $g: B\to C$ יורדת. אז ההרכבה $g\cdot f : A\to C$ היא פונקציה יורדת. הטענה נכונה במובן הצר וגם במובן הרחב.

הוכחה (תרגיל הביתה)

טענה (יורדת על יורדת)

נתונות $f: A\to B$ יורדת ו- $g: B\to C$ יורדת. אז ההרכבה $g\cdot f : A\to C$ היא פונקציה עולה. הטענה נכונה במובן הצר וגם במובן הרחב.

הוכחה (תרגיל הביתה)

משפט בולצנו וירשטרס BW(בלי הוכחה)

נתונה סדרה a_n אשר חסומה (מלעיל ומלרע). אז יש לה תת סדרה a_{nk} המתכנסת. גבול הסדרה חסום על ידי החסמים של הסדרה המקורית.

משפט וירשטרס (חסימות)

נתונה פונקציה f אשר מוגדרת ורציפה בכל נקודות הקטע [a,b]. אז f בקטע חסומה מלעיל ומלרע.

בלי הוכחה

משפט וירשטרס (מקסימום)

נתונה פונקציה f אשר מוגדרת ורציפה בכל נקודות הקטע [a,b]. אז f מקבלת את ערך חסם המלעיל בקטע, כלומר הסופרמום הוא מקסימום. באותה צורה האינפימום הוא מינימום.

הוכחה
נוכיח רק עבור חסם עליון. הוכחה עבור חסם תחתון דומה והיא תרגיל הביתה.

נסמן את החסם העליון של f בקטע על ידי M. אז לפי הגדרת חסם עליון, לכל מספר טבעי n יש x_n, כך ש $a\le x_n \le b$ וכך ש $f(x_n)>M-(1/n)$. נפעיל גבול ונקבל כי $M=\lim_{n\to\infty} M-\frac{1}{n}\le \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. כעת נשים לב כי הסדרה x_n חסומה, ולפי משפט BW יש לה תת סדרה מתכנסת $\lim_{n\to\infty} x_{n_k}=c$ כך ש $a\le c\le b$. כיון ש c היא בתחום הרציפות של f אז לפי הגדרת הגבול $\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k})=\lim_{x\to c} f(c)$, ולפי הרציפות $\lim_{x\to c} f(c)=f(c)$, ומצד שני $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=M$, ולכן נובע כי $f(c)=M$, כדרוש.

משפט- תכונת ערכי הביניים של קושי (גובה 0).

נתונה פונקציה f אשר מוגדרת ורציפה בכל נקודות הקטע $[a,b]$, ונתון כי $f(a)f(b)<0$. אז קימת נקודת ביניים c אחת לפחות כך ש $a<c<b$ וכך ש $f(c)=0$.

הוכחה

אי השויון $f(a)f(b)<0$ שקול לשני אי שויונים $f(a)<0<f(b)$ ו $f(b)<0<f(a)$, ואנו נוכיח את הטענה רק עבורהמקרה $f(a)<0<f(b)$, וההוכחה עבור המקרה השני דומה והיא תרגיל הביתה.
נגדיר $a_0=a, b_0=b$. נגדיר $c_0=(a_0+b_0)/2$. תתכנה 3 אפשרויות עבור $f(c_0)$. $f(c_0)=0,\ f(c_0)<0,\ f(c_0)>0$.
אם $f(c_0)=0$ אז התמזל מזלנו ומצאנו $c=c_0$ כך ש $f(c)=0$ ישר בהתחלה.
אם $f(c_0)<0$, אז נגדיר $a_1=c_0$ וכן $b_1=b_0$. אם $0<f(c_0)$, נגדיר $a_1=a_0$ וכן $b_1=c_0$. בכל מקרה שאיננו המקרה הראשון יתקיים $f(a_1)<0<f(b_1)$.
כעת נגדיר $c_1=(a_1+b_1)/2$. שוב נפריד למקרים לפי הערך של $f(c_1)$.
או שיתקיים כי קיים n כך ש $f(c_n)=0$ ואז הוא יהיה c שחפשנו, או שנקבל סדרות אינסופיות a_n ו b_n המקיימות כי לכל n $a_n<b_n$, כך ש a_n עולה במובן הרחב, b_n יורדת במובן הרחב, מתקיים כי $f(a_n)<0<f(b_n)$, ובנוסף מתקיים $b_n-a_n=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}=\cdots=\frac{b_0-a_0}{2^n}$. אי השויונים $a_n<b_n\le b_1$ מראים כי הסדרה a_n מונוטונית עולה במובן הרחב וחסומה מלעיל ולכן מתכנסת לגבול d אשר מקיים $a\le d\le b$. אי השויונים $a_1\le a_n<b_n$

מראים כי הסדרה b_n מונוטונית יורדת במובן הרחב וחסומה מלרע ולכן מתכנסת לגבול g אשר מקיים $a\leq g\leq b$. אי השויון $a_n < b_n$ מתרחב ל $a_n\leq d\leq g\leq b_n$. כמו כן נקבל $0\leq g-d\leq b_n-a_n$, ואם נפעיל גבול נקבל לפי משפט הסנדביץ $0\leq g-d\leq 0$, ולכן $g=d$. נסמן $c=g=d$, ולכן שתי הסדרות a_n ו b_n מתכנסות לc וברור כי $a=a_0\leq a_n\leq c\leq b_n\leq b_0=b$ כלומר c היא בתחום ההגדרה ונקודת רציפות של f. לפי הגדרת הרציפות $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(c)\leq 0$ וכמו כן $\lim_{n\to\infty} f(b_n)=f(c)\geq 0$ ולכן נובע כי $f(c)=0$, כדרוש.

טענה

אם a נקודת גזירות של f, אז היא גם נקודת רציפות של f.

הוכחה

נתון שקים הגבול $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=b$. נעביר אגפים $f(a+h)=f(a)+bh$ ושוב נשאיף ונקבל כי $\lim_{h\to 0} f(a+h)=\lim_{h\to 0}[f(a)+bh]=f(a).$ אבל לפי ההגדרה $\lim_{h\to 0+} f(a+h)=\lim_{x\to a+} f(x), \lim_{h\to 0-} f(a+h)=\lim_{x\to a-} f(x).$, הללו שוים ל f(a) כלומר a היא נקודת רציפות של f.

משפטי אריתמטיקה של נגזרות

נניח כי f,g גזירות בנקודה a. וc הינו קבוע אז גם :

1. $f\pm g$ גזירה בנקודה a ו $(f\pm g)'(a)=(f)'(a)\pm(g)'(a)$
2. cf גזירה בנקודה a ו $(cf)'(a)=c(f)'(a)$
3. fg גזירה בנקודה a ו $(fg)'(a)=(f)'(a)g(a)+f(a)(g)'(a)$

הוכחה

נתון כי לכל סדרה h_n אשר מקיימת $\lim_{n\to\infty} h_n=0$, נובע כי $\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n}=f'(a)$ וכי $\lim_{n\to\infty}\frac{g(a+h_n)-g(a)}{h_n}=g'(a)$. כיון שגזירות גוררת רציפות נובע כי $\lim_{n\to\infty} f(a+h_n)=f(a)$ וכי $\lim_{n\to\infty} g(a+h_n)=g(a)$. לכן :

1. $$\frac{(f\pm g)(a+h_n)-(f\pm g)(a)}{h_n}=\frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n}\pm\frac{g(a+h_n)-g(a)}{h_n}$$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(f\pm g)(a+h_n)-(f\pm g)(a)}{h_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n}\pm$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(a+h_n)-g(a)}{h_n}=f'(a)\pm g'(a)$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{(cf)(a+h_n)-(cf)(a)}{h_n}=c\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n}=cf'(a)$$

3. $$\frac{(fg)(a+h_n)-(fg)(a)}{h_n}=\frac{f(a+h_n)g(a+h_n)-f(a)g\left(a\right)}{h_n}=$$

$$=\frac{f(a+h_n)g(a+h_n)-f(a+h_n)g(a)+f(a+h_n)g(a)-f(a)g\left(a\right)}{h_n}=$$

$$=\frac{f(a+h_n)(g(a+h_n)-g(a))}{h_n}+\frac{g(a)(f(a+h_n)-f(a))}{h_n}=$$

$$=f(a+h_n)\frac{(g(a+h_n)-g(a))}{h_n}+g(a)\frac{(f(a+h_n)-f(a))}{h_n}$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(fg)(a+h_n)-(fg)(a)}{h_n}=\lim_{n\to\infty}f(a+h_n)\lim_{n\to\infty}\frac{(g(a+h_n)-g(a))}{h_n}+$$

$$+g(a)\lim_{n\to\infty}\frac{(f(a+h_n)-f(a))}{h_n}=f(a)g'(a)+g(a)f'(a).$$

המשפטים של החשבון הדיפרנציאלי.

משפט פרמה. Fermat

נתונות פונקציה f ונקודות קיצון מקומי b ונתון כי f'(b) מוגדרת. אז f'(b)=0.

הוכחה

נוכיח עבור מקסימום מקומי בלבד. ההוכחה למינימום מקומי דומה. נשתמש בהגדרת הנגזרת: מתקיים הגבול $f'(b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$. והוא שווה לגבול מימין ומשמאל.

נשתמש בגבול מימין. אז h>0, ולפי תכונות המקסימום (עבור 0<h<a) מתקיים f(b+h)≤f(b), ולכן המונה בגבול מקיים

$f(b+h)-f(b)\le 0$, המכנה חיובי ולכן המנה $\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$ היא קטנה או שוה ל-0, והגבול מימין קטן או שוה ל-0. הגבול משמאל הוא גבול של בטויים שבהם המונה קטן או שוה ל-0, המכנה שלילי, לכן המנה אי שלילית והגבול אי שלילי. אז הגבול, שהוא גבול מימין ומשמאל הוא גם גדול או שוה וגם קטן או שוה ל-0, ולכן הוא 0. ■

משפט רול Rolle

נתונה פונקציה f אשר מוגדרת בקטע $[a,b]$, רציפה בכל נקודות הקטע, וגזירה בכל נקודות הקטע הפתוח (a,b), ונתון כי $f(a)=f(b)$. אז קימת לפחות נקודה אחת c, כך ש $a<c<b$ וכך ש $f'(c)=0$.

הערה. יכולות להיות שתי נקודות כאלו או שלוש. לא אומרים איך למצוא את c.

הוכחה

כיון ש-f רציפה בקטע סגור, אז לפי משפט וירשטרס יש נקודה c בקטע הסגור $[a,b]$ שבה מתקבל המקסימום של f על הקטע. אם c בקטע הפתוח, כלומר $c\neq a, c\neq b$, אז לפי ההגדרה c היא נקודת מקסימום מקומי ולכן לפי משפט פרמה נובע כי $f'(c)=0$, והוכחנו את הטענה. יש גם לפי משפט וירשטרס נקודה d שבה ל-f יש את ערך המינימום בקטע. אם $d\neq a, d\neq b$ נובע כי d היא נקודת מינימום מקומי ושוב לפי משפט פרמה נובע כי $f'(d)=0$, והסתיימה ההוכחה.
נותר להוכיח את המשפט רק עבור המקרה שבו c,d הן בקצות הקטע. המקסימום והמינימום של f הם $f(a)$ ו $f(b)$. אבל נתון כי $f(a)=f(b)$, ולכן נובע כי f היא הפונקציה הקבועה. אבל אז $f'=0$ בכל נקודות הקטע $[a,b]$, וברור שהיא מקיימת את המשפט. ■

משפט ערך הבינים של לגרנג' Lagrange

נתונה פונקציה f אשר מוגדרת בקטע [a,b], רציפה בכל נקודות הקטע, וגזירה בכל נקודות הקטע הפתוח (a,b) אז קימת לפחות נקודה אחת c, כך ש $a<c<b$ וכך ש $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

הערה. יכולות להיות שתי נקודות כאלו או שלוש. לא אומרים איך למצוא את c. כמו כן אם נציב את הנתון f(b)=f(a), נקבל כי f'(c)=0, כלומר משפט לגרנג׳ הופך להיות המשפט של רול.

הוכחה

גם הוכחת משפט לגרנג׳ מסתמכת על המשפט של רול. אנו לוקחים את הנתון על f, ומנסים לשנות את המצב כדי לקבל נתונים כמו במשפט רול. נגדיר $k(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$.

אז k היא פונקציה ממעלה ראשונה, ולכן הגרף שלה הוא קו ישר. על ידי הצבה רואים כי k(a)=f(a),k(b)=f(b), כלומר הקו הישר שהוא הגרף של k, מתלכד עם הגרף של f בנקודות הקצה a,b. ברור כי k היא פונקציה רציפה בקטע [a,b] וגזירה בכל נקודות הקטע הפתוח (a,b). נגדיר כעת h(x)=f(x)-k(x). אז h היא הפרש של שתי פונקציות רציפות בקטע הסגור ולכן גם היא כזו, והיא הפרש של שתי פונקציות גזירות בקטע הפתוח ולכן גם היא כזו, ולפי הבניה h(a)=f(a)-k(a)=0 h(b)=f(b)-k(b)=0, ולכן h מקיימת את תנאי משפט רול ולכן יש נקודה c אחת לפחות שבה מתקיים h'(c)=0.

לפי ההגדרה h'=f'-k'=f'-(f(b)-f(a))/(b-a), כלומר קיימת c אחת לפחות כך ש f'(c)-(f(b)-f(a))/(b-a)=0, כדרוש. ■

קטעי עליה

נניח כי נתונים פונקציה f מוגדרת ורציפה בכל נקודות הקטע [a,b], ולכל x, כך ש$a<x<b$ מוגדרת f'(x) ומתקיים כי f'(x)>0. אז [a,b] קטע עליה של f.

הוכחה

תהינה נתונות נקודות p,q כך ש $a<p<q<b$, צ״ל כי f(p)<f(q). נשים לב כי תנאי משפט לגרנג׳ קימים בקטע [p,q], כי f רציפה בקטע הסגור וגזירה בפתוח. אז לפי מסקנת משפט לגרנג׳ קימת

c אחת לפחות כך ש p<c<q וכך ש $f'(c)=\frac{f(q)-f(p)}{q-p}$. לפי ההנחה f'(c)>0, ולכן המנה $\frac{f(q)-f(p)}{q-p}$. היא חיובית. כיון שהמכנה חיובי לפי הנתון, גם המונה חיובי כדרוש. ■

קטעי ירידה

נניח כי נתונים פונקציה f מוגדרת ורציפה בכל נקודות הקטע [a,b], ולכל x, כך שa<x<b מוגדרת f'(x) ומתקיים כי f'(x)>0.
אז [a,b] קטע עליה של f.

ההוכחה דומה מאוד להוכחת הטענה הקודמת.

משפט ערך הבינים של קושי Cauchy

נתונים הקטע [a,b], ופונקציות g,f, אשר מוגדרות ורציפות בכל נקודות הקטע, וגזירות בכל נקודות הקטע הפתוח (a,b), וכך שלכל x,a<x<b מתקיים g'(x)>0. אז קימת לפחות נקודה אחת c, כך ש a<c<b וכך ש $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

הערה. יכולות להיות שתי נקודות כאלו או שלוש. לא אומרים איך למצוא את c. כמו כן אם נציב את הנתון g(x)=x, נקבל כי g'(c)=1,g(b)=b,g(a)=a, כלומר משפט ערך הבינים של קושי הופך להיות משפט ערך הבינים של לגרנג׳.

הוכחה

נכליל את הוכחת משפט ערך הבינים של לגרנג׳, נביט בפונקציה h אשר הוגדרה שם, וכל אות של משתנה או של קבוע נחליף בערך של g באותה נקודה. כלומר במקום $h(x)=f(x)-k(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$ נביט על $h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))-f(a)$. קודם כל נשים לב כי לפי טענה קודמת נובע כי g(b)>g(a) ולכן g(b)-g(a)>0.
חבור חסור כפל או חלוק בקבוע משאירים פונקציה רציפה רציפה, ומשאירים פונקציה גזירה גזירה, ולכן $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))+f(a)$ מתקבלת מg על ידי חסור כפל

וחלוקה בקבועים, ולכן היא פונקציה רציפה בקטע הסגור וגזירה בפתוח. גם f רציפה בקטע הסגור וגזירה בפתוח ולכן כיון שחסור פונקציות רציפות היא רציפה וחסור שתי פונקציות גזירות היא גזירה, נובע כי h היא פונקציה רציפה ב [a,b] וגזירה ב (a,b). כמו כן לפי הנתון h(a)=h(b)=0, ולכן מתקיימים תנאי משפט רול, ולכן לפי מסקנת משפט רול קימת c אחת לפחות כך ש a<c<b וכך ש h'(c)=0. לפי הגדרת הנגזרת נובע כי $h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$ או על ידי העברת אגפים $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, כדרוש. ■

כלל ל׳הופיטל עבור 0/0 בנקודה סופית

נתונים קטע [a,b] ופונקציות f,g אשר מוגדרות רציפות וגזירות בקטע (a,b) וכך שמתקיים $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0$ ו g'>0. אז מתקיים כי $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

הוכחה

כיון שמתקיים $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0$, ניתן להרחיב את תחום ההגדרה של f ושל g לקטע הסגור [a,b] על ידי זה שנגדיר f(b)=g(b)=0. אז מתקיים לפי משפט ערך הביניים של קושי שיימת נקודה c אחת לפחות, x<c<b כך שמתקיים השויון $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ ולכן $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b, x<c<b} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to b} \frac{f'(c)}{g'(c)}$, כדרוש. ■