המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>מבחן סוף בקורס אינפי 1 –סמסטר סתו התשע"ב מועד א</u>

יום ו, יז שבט התשע"ב 10-2-2012

- **המורה: גיורא דולה, המתרגל: משה פדרבוש**
- **משך המבחן: 3 שעות**
- **התשובות תכתבנה במחברת, למעט התשובה של שאלה 2, שתענה בגוף השאלון.**
- **הציון המירבי האפשרי הוא 100 נקודות.**
- **מותרים מחשבונים לא גרפיים.**

בהצלחה

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

1. חשב שניים משלושת הגבולות הבאים :
(20%)

א : $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\cdots+2012^n}}\right)$

ב : $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x$

ג : $\lim_{x\to\infty}(5e^{7x}+2e^{2x}+3x)^{\frac{1}{x}}$

2. ענה בנכון או לא נכון בלבד על חמשת הטענות הבאות. לכל תשובה חובה לתת נמוק בגוף השאלון ומותר לנימוק להיות באורך של שורה אחת בלבד (15%)

א : נתון : $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ ו $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ וכן $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{b_n}=e$, אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$

נימוק :

ב. $\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=1$

נימוק :

ג. אם סדרה חסומה וקיימת לה תת-סידרה מונוטונית יורדת, אזי הסידרה מתכנסת.

נימוק :

ד. אם f מוגדרת לכל x והיא חד-חד ערכית, אזי היא עולה ממש או יורדת ממש.

נימוק :

ה. לפונקציה הבאה יש אי- רציפות סליקה בנקודה $x=1$

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)\cdot\sin\frac{1}{(x-1)^2} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

נימוק:

3. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^3}{x-1}$ (25%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א: תחום הגדרה

ב: נקודות חיתוך עם הצירים.

ג: זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.

ד: תחומי עליה וירידה ונקודות קריטיות.

ה: נקודות קיצון.

ו: נקודות פיתול, תחומי קמירות כלפי מעלה וקמירות כלפי מטה.

ז: אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.

ח: שרטט את גרף הפונקציה.

בכל אחת מההוכחות שמבקשים בשאלות 4 ו5, מותר להשתמש במשפטים אחרים שהוכחנו בכתה, אבל יש לנסח אוותם במדויק, לפני או אחרי ההוכחה.

4. (30%)

א: נסח את משפט ערך הביניים של קושי עבור פונקציות רציפות.

ב: הוכח את המשפט עבור המקרה c=0.

ג: בעזרת המשפט בחלק א', הוכח כי לפונקציה:

$$f(x)=5\ln(x^4)+5x^6+\cos(x^6)-7$$

יש לפחות שני שורשים ממשיים.

5. הוכח כי הסדרה $(1+\frac{1}{n})^n$ מתכנסת. (10%)

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) הוא $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, a^0 = 1,$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו $0 < a, a \neq 1$.

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a \sqrt[y]{x} = \tfrac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828...$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח :

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V=\pi\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad \sin^2 x+\cos^2 x=1;$$

$$\tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad \tan x\cdot\cot x=1;$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\qquad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad 1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
:
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
:
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

תשובות

:1-א

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\cdots+2012^n}}\right)=?,\ 2012^n\le 1^n+2^n+3^n+\cdots+2012^n\le 2012^n+2012^n+\cdots+2012^n\to$$

$$2012^n\le 1^n+2^n+3^n+\cdots+2012^n\le 2012\cdot 2012^n\to \sqrt[n]{2012^n}\le\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\cdots+2012^n}\le\sqrt[n]{2012\cdot 2012^n}$$

$$\to 2012\le\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\cdots+2012^n}\le\sqrt[n]{2012}\sqrt[n]{2012^n}\to 2012\le\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\cdots+2012^n}\le 2012\sqrt[n]{2012}$$

$$\to\frac{1}{2012\sqrt[n]{2012}}\le\frac{1}{\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\cdots+2012^n}}\le\frac{1}{2012},\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2012}=1\to$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\cdots+2012^n}}\right)=\frac{1}{2012}.$$

:1-ב

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x=0^0=?,\ e^{\ln((\sin x)^x)}=e^{x\ln(\sin(x))}=e^{\frac{\ln(\sin(x))}{\frac{1}{x}}},\ \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(\sin(x))}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}-\frac{x^2\cos(x)}{\sin(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0+}-\frac{x}{\sin(x)}\frac{x\cos(x)}{1}=-\lim_{x\to 0+}\frac{x}{\sin(x)}\lim_{x\to 0+}x\cos(x)=-1\cdot 0\cdot 1=0.\ \lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x=e^0=1.$$

:1-ג

$$\lim_{x\to\infty}(5e^{7x}+2e^{2x}+3x)^{\frac{1}{x}}=?,\ (e^{2x}\le e^{7x})\leftrightarrow(1\le e^{7x}/e^{2x})\leftrightarrow(1\le e^{5x})\leftrightarrow(0\le x).$$

$$(x\le e^{7x})\leftrightarrow\left(\frac{x}{e^{7x}}\le 1\right).\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{7x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{7e^{7x}}=0\to\exists K,[(n>K)\to\left(\frac{x}{e^{7x}}\le 1\right)].$$

$$e^{7x}\le 5e^{7x}+2e^{2x}+3x\le(*)\le 5e^{7x}+2e^{7x}+3e^{7x}=10e^{7x}$$

כאשר אי השויון המסומן (*) מתקיים רק עבור L=max{0,K}<n.
במילא כאשר x שואף לאינסוף הוא עובר את L ולכן נקבל

$$e^{7x}\le 5e^{7x}+2e^{2x}+3x\le 10e^{7x}\to(e^{7x})^{\frac{1}{x}}\le(5e^{7x}+2e^{2x}+3x)^{\frac{1}{x}}\le(10e^{7x})^{\frac{1}{x}}\to$$

$$7\le(5e^{7x}+2e^{2x}+3x)^{\frac{1}{x}}\le(10)^{\frac{1}{x}}7.\ \lim_{x\to\infty}(10)^{\frac{1}{x}}=1.\to\lim_{x\to\infty}(5e^{7x}+2e^{2x}+3x)^{\frac{1}{x}}=7.$$

2. א : נתון: $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ ו $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ וכן $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{b_n}=e$, אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$

נכון נמוק קצר

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{b_n a_n}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right]^{\frac{b_n}{a_n}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}}=e^1\to\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1.$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=1$

לא נכון נמוק קצר

$$x \pm \sin x = x(1 \pm \frac{\sin x}{x}).|\frac{\sin x}{x}| \le \frac{1}{x}, 0 \le \lim_{x\to\infty}|\frac{\sin x}{x}| \le \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 \to$$

$$\lim_{x\to\infty}(x \pm \sin x) = \lim_{x\to\infty} x(1 \pm \frac{\sin x}{x}) = \infty(1 \pm 0) = \infty.$$

ולכן גם המונה וגם המכנה שואפים לאינסוף ולכן אפשר להשתמש בכלל ליהופיטל, ומה שרשום בסעיף ב הוא בדיוק שמוש בכלל ליהופיטל.

אבל $\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ לא קים כי המכנה מתאפס אינסוף פעמים ולכן השויון $\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = 1$ איננו נכון.

השויון $\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x} = 1$ כן נכון כיון ש $\frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \frac{x(1-\frac{\sin x}{x})}{x(1+\frac{\sin x}{x})}$ ולכן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(1-\frac{\sin x}{x})}{x(1+\frac{\sin x}{x})} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

ג. אם סדרה חסומה וקיימת לה תת-סידרה מונוטונית יורדת, אזי הסידרה מתכנסת.

לא נכון והסדרה $(-1)^{n+1}(1-\frac{1}{n})$ היא דוגמא נגדית. לכל n מתקיים $0 \le |(-1)^{n+1}(1-\frac{1}{n})| = (1-\frac{1}{n}) < 1$ ולכן זוהי סדרה חסומה ע״י ± 1, ותת סדרת האיברים בעלי מציין זוגי שואפת ל-0, והאיזוגיים שואפת ל1- , ולכן הסדרה כולה איננה מתכנסת.

ד. אם f מוגדרת לכל x והיא חד-חד ערכית, אזי היא עולה ממש או יורדת ממש.

לא נכון והפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ היא דוגמא נגדית.

$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} \to x = y$ ולכן f חח״ע. אבל 1<2,f(1)>f(2) מראה כי f אינה עולה, 1<1,f(-1)<f(1)- מראה כי f אינה יורדת.

ה. לפונקציה הבאה יש אי- רציפות סליקה בנקודה $x=1$

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)\cdot\sin\dfrac{1}{(x-1)^2} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

נכון   נימוק קצר

$$\lim_{x\to1}(x-1)\cdot\sin\frac{1}{(x-1)^2}=?,|\sin\frac{1}{(x-1)^2}|\le 1,0\le|(x-1)\sin\frac{1}{(x-1)^2}|\le|x-1|,$$

ולכן הגבול

$$\lim_{x\to1}|(x-1)|=0\to\lim_{x\to1}|(x-1)\sin\frac{1}{(x-1)^2}|=0\to\lim_{x\to1}(x-1)\sin\frac{1}{(x-1)^2}=0.$$

הדו צדדי קים ושונה מערך הפונקציה, כדרוש.

3. ת״ה $\mathbb{R}-\{1\}$. ב. $y=0\to x=0$ וכמו כן $x=0\to y=0$ לכן נקודת החתוך היא (0,0). ג. ת״ה איננו סימטרי ולכן זו פונקציה כללית.
ד,ה,ו

$$f(x)=\frac{x^3}{x-1},\ f'(x)=\frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\frac{x^2[3x-3-x]}{(x-1)^2}=\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2},$$

$$f''(x)=\frac{[2x(2x-3)+2x^2](x-1)^2-2(x-1)x^2(2x-3)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)x[(2x-3)(x-1)+x(x-1)-x(2x-3)]}{(x-1)^4}=$$

$$\frac{2x(3-2x+x^2-x)}{(x-1)^3}=\frac{2x(x^2-3x+3)}{(x-1)^3}.$$

נקודות קריטיות 0,1,1.5. נציגים -1,0.5,1.25,2. נקבל את טבלת סימני הנגזרות.

	(-∞,0)	(0,1)	(1,1.5)	(1.5,∞)
סימן של y'	-	-	-	+
סימן של y''	+	-	+	+
התנהגות y	יורדת ומחייכת	יורדת ובוכה	יורדת ומחייכת	עולה ומחייכת

ולכן (0,0) נקודת פתול, (1.5,6.75) נקודת מינימום מקומית. אסימפטוטות אנכיות רק אפשריות עבור x=1. מתקיים כי $\lim_{x\to1-}\frac{x^3}{x-1}=\frac{1}{0-}=-\infty$ וגם כי $\lim_{x\to1+}\frac{x^3}{x-1}=\frac{1}{0+}=\infty$ ולכן אכן x=1 ישר אסימפטוטה אנכית אליו העקום נדבק משני הצדדים. עבור אסימפטוטה משופעת ב$\pm\infty$, נקבל $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x-1}}{x}=\infty$ כלומר קבלנו שאין ישר אסימפטוטה משופעת ב$\pm\infty$.

4. ג: נציב בפונקציה:

$$f(x)=5\ln(x^4)+5x^6+\cos(x^6)-7$$
$$f(1)=5\cdot0+5\cdot1+\cos(1)-7<5+1-7=-1$$
$$f(2)=5\ln(16)+320+\cos(64)-7>320-1-7>0$$

ולכן יש שורש אחד לפחות בקטע [1,2]. כיון שהפונקציה היא זוגית יש לה גם שורש נוסף בקטע [-2,-1], ולכן מספר השרשים שלה הוא לפחות 2.