המכללה האקדמית נתניה

מבחן באינפי א'

שם המרצה :ד"ר גיורא דולה
תאריך הבחינה : יום ה יג אדר א התשעד 13-2-2014
משך הבחינה : שעתיים וחצי
חומר עזר : מחשבון (לא גרפי).
ענה על כל השאלות הבאות :

1. א. נסח והוכח את משפט ערך הממוצע של קושי. (20%)

ב. הוכח כי לכל $0 \le \alpha < \beta \le \frac{\pi}{3}$ מתקיים :

$$1 \le \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{\sin\beta - \sin\alpha} \le 8$$

2. חשב את שלושת הגבולות הבאים : (30%)

א: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 4^n + 6^n + \cdots + 80^n}$

ב: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

ג: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3}{3x^3 - 5x^2 - 4}\right)^{\frac{8x^2+5}{7x}}$

3. בדוק רציפות/ אי- רציפות של הפונקציה הבאה בנקודה $x = 5$ וקבע את סוגה במקרה של אי רציפות. (15%)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{14}{7 - e^{\frac{3}{25-x^2}}} & x \ne 5 \\ 2 & x = 5 \end{cases}$$

4. הוכח או הפרך (אפשר להפריך בדוגמא נגדית) (10%)

א. אם $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - 2| = 0$ אז הסדרה a_n מתכנסת בהכרח.

ב. לפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ יש נקודת מינימום מקומי.

5. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2+5x+10}{x+3}$ (25%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א: תחום הגדרה

ב: נקודות חיתוך עם הצירים.

ג: זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.

ד: תחומי עליה וירידה.

ה: נקודות קיצון.

ו: נקודות פיתול, תחומי קמירות כלפי מעלה וקמירות כלפי מטה.

ז: אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.

ח: שרטט את גרף הפונקציה.

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a, a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y = y\cdot\log_a x;$$

$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a \sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828...$$

$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

גבולות בסיסיים $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(\arcsin(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\left(\arcsin(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \left(x^a\right)'=ax^{a-1},\qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$

$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (e^x)'=e^x;$$

$$\left(\arccos(x)\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad (\cos x)'=-\sin x,\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$

$$\left(\arctan(x)\right)'=\frac{1}{1+x^2},\qquad (\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\left(\operatorname{arccot}(x)\right)'=-\frac{1}{1+x^2},\qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$.(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$

$$\int \cos xdx = \sin x + C;$$

$$\int \sin xdx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$
$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$:
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha + \beta}{2})\cos(\frac{\alpha - \beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha - \beta}{2})\cos(\frac{\alpha + \beta}{2}).$$:
$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha + \beta}{2})\cos(\frac{\alpha - \beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha + \beta}{2})\sin(\frac{\alpha - \beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$:
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

פתרונות

1 ב. נשתמש במשפט ערך הביניים של קושי, עבור הפונקציות $f(x)=\tan(x),g(x)=\sin(x)$ בקטע $[0,\frac{\pi}{3}]$. באותו קטע f,g רציפות וגזירות וגם $g'(x)=\cos(x)\neq 0$ ולכן מתקיימים תנאי משפט ערך הביניים של קושי, ולכן גם המסקנה כלומר קיימת c אחת לפחות כך ש $0\le\alpha<c<\beta\le\frac{\pi}{3}$ וכך שמתקיים:

$$\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{\sin\beta-\sin\alpha}=\frac{1}{\cos^2(c)}\frac{1}{\cos(c)}=\frac{1}{\cos^3(c)}$$

כיון ש $\cos(x)$ יורדת וחיובית אז כך גם $\cos^3(x)$ ולכן $1/\cos^3(x)$ עולה וחיובית, ולכן נקבל הערכה $1=\frac{1}{\cos^3(0)}\le\frac{1}{\cos^3(c)}\le\frac{1}{\cos^3(\pi/3)}=\frac{1}{(1/2)^3}=8.$ כדרוש.

.2

א:

$$80^n\le 2^n+4^n+6^n+\cdots+80^n\le 40\cdot 80^n\to\sqrt[n]{80^n}\le\sqrt[n]{2^n+4^n+6^n+\cdots+80^n}\le\sqrt[n]{40\cdot 80^n}$$

$$\to 80\le\sqrt[n]{2^n+4^n+6^n+\cdots+80^n}\le 80\sqrt[n]{40}\to 80\le\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+4^n+6^n+\cdots+80^n}\le 80\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{40}=80$$

$$\to\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+4^n+6^n+\cdots+80^n}=80.$$

ב:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)}.\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x})=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)}=\frac{0}{2}=0.$$

ג:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{3x^3}{3x^3-5x^2-4})^{\frac{8x^2+5}{7x}},(f(x)-1)g(x)=(\frac{3x^3}{3x^3-5x^2-4}-1)\frac{8x^2+5}{7x}=\frac{5x^2+4}{3x^3-5x^2-4}\frac{8x^2+5}{7x}=$$

$$=\frac{40x^4+zevel}{21x^4+zevel},\lim_{x\to\infty}(f(x)-1)g(x)=\frac{40}{21},\lim_{x\to\infty}(\frac{3x^3}{3x^3-5x^2-4})^{\frac{8x^2+5}{7x}}=e^{40/21}$$

$$\lim_{x\to5+}25-x^2=0-,\ \lim_{x\to5-}25-x^2=0+,\ \lim_{x\to5+}\frac{3}{25-x^2}=-\infty,\ \lim_{x\to5-}\frac{3}{25-x^2}=\infty,\ \lim_{x\to5+}e^{\frac{3}{25-x^2}}=0,$$

$$\lim_{x\to5-}e^{\frac{3}{25-x^2}}=\infty,\ \lim_{x\to5+}\frac{14}{7-e^{\frac{3}{25-x^2}}}=\frac{14}{7}=2,,\ \lim_{x\to5-}\frac{14}{7-e^{\frac{3}{25-x^2}}}=\frac{14}{\infty}=0$$

ולכן x=5 היא נקודת קפיצה עבור f.

תשובה 3

א.

$$-\left|a_n-2\right|\le a_n-2\le\left|a_n-2\right|\to\lim_{n\to\infty}-\left|a_n-2\right|\le\lim_{n\to\infty}(a_n-2)\le\lim_{n\to\infty}\left|a_n-2\right|.$$

$$\to0\le\lim_{n\to\infty}(a_n-2)\le0\to\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0\to\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-2+2)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(a_n-2)+\lim_{n\to\infty}2=2.$$

ב. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\to f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ מהטבלה

$range of (f)$	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$sign of (f')$	$-$	$+$

נובע כי f יורדת עבור x-ים שליליים ועולה עבור חיוביים ולכן x=0 היא נקודת מינימום מקומי ומוחלט.

תשובה 4

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

א : $f(x)=\dfrac{x^2+5x+10}{x+3}:\mathbb{R}-\{-3\}\to\mathbb{R}$

ב : $y=0\to x\in\phi.\ x=0\to y=\dfrac{10}{3}$ לכן רק (0,10/3) נקודת חיתוך עם הצירים.

ג : זוגיות/אי-זוגיות אין כי ת"ה איננו סימטרי.

ד : ה : ו

$$f'(x)=\frac{(2x+5)(x+3)-(x^2+5x+10)}{(x+3)^2}=\frac{(2x^2+11x+15)-(x^2+5x+10)}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}=\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}.$$

$$f''(x)=\frac{(2x+6)(x+3)^2-2(x+3)(x^2+6x+5)}{(x+3)^4}=\frac{2(x+3)[(x^2+6x+9)-(x^2+6x+5)]}{(x+3)^4}=\frac{8(x+3)}{(x+3)^4}$$

ולכן

$(-\infty,-5)$	$(-5,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,\infty)$
$+$	$-$	$-$	$+$
$-$	$-$	$+$	$+$

לכן בתחום הראשון f עולה ובוכה, בשני יורדת

ובוכה, שלישית יורדת ומחייכת, רביעית עולה ומחייכת. לכן (-5,-5) מקסימום מקומי, (-1,3) מינימום מקומי.

$$\lim_{x\to -3-}\frac{x^2+5x+10}{x+3}=\frac{4}{0-}=-\infty,\ \lim_{x\to -3+}\frac{x^2+5x+10}{x+3}=\frac{4}{0+}=\infty$$

לכן x=-3 ישר אסימפטוטה אנכית אליו העקום נדבק פעמיים. הפונקציה היא רציונלית ומספיק לבדוק את האסימפטוטה המשופעת ב∞=x בלבד, ואכן :

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+10}{(x+3)x}=1,\ f(x)-1x=\frac{x^2+5x+10}{x+3}-x=\frac{x^2+5x+10}{x+3}-\frac{x(x+3)}{x+3}=\frac{2x+10}{x+3}..$$

$$b=\lim_{x\to}\frac{x^2+5x+10}{x+3}-x=\lim_{x\to}\frac{2x+10}{x+3}=2.y=1x+2=x+2$$

כלומר x=2 אסימפטוטה משופעת ב∞±