המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>מבחן סוף בקורס אינפי א-מועד א –סמסטר סתו התשע"ה</u>

יום ב, ד אדר ה'תשע"ה 23-2-2015
שם המרצה: ד"ר גיורא דולה

משך הבחינה: <u>שעתיים וחצי</u>
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).
<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. א. נסח <u>והוכח</u> את משפט ערך הביניים של קושי. (20%)
ב. הוכח כי למשוואה הבאה יש לפחות שני שורשים ממשיים:

$$f(x) = -9x^5 + e^{2x} + 8\sin x - 3\cos x$$

2. חשב שניים מתוך שלושת הגבולות הבאים: (20%)

א:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{1+n^4}} + \frac{n}{\sqrt{2+n^4}} + \frac{n}{\sqrt{3+n^4}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n+n^4}}\right)$$

ב:

$$\lim_{x\to\infty}(2e^{-6x} + 8x^2 + 9e^{4x})^{\frac{7}{5x}}$$

ג:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x^3-7x}{8x^3-5x^2-1}\right)^{5+4x}$$

3. בדוק רציפות/ אי- רציפות של הפונקציה הבאה (15%)
בנקודה $x=4$ וקבע את סוגה במקרה של אי רציפות.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{6+7^{\frac{-6}{(2x-8)^3}}} & x \neq 4 \\ 0 & x = 4 \end{cases}$$

4. הוכח לפי הגדרת הגבול כי מתקיים: (10%)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+6n-7}{4n^2+5n}=\frac{3}{4}$$

5. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2}$ (25%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א: תחום הגדרה
ב: נקודות חיתוך עם הצירים.
ג: זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.
ד: תחומי עליה וירידה.
ה: נקודות קיצון.
ו: נקודות פיתול, תחומי קמירות כלפי מעלה וקמירות כלפי מטה.
ז: אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.
ח: שרטט את גרף הפונקציה.

6. הוכח או הפרך (אפשר להפריך בדוגמא נגדית) (10%)

א. נזכר בפונקצית ההרכבה $g\circ f$ המוגדרת על ידי $(g\circ f)(x)=g(f(x))$, ובנוסף ל f קוראים הפונקציה הפנימית ול-g קוראים הפונקציה החיצונית.

נתון כי פונקצית ההרכבה $g\circ f$ מקימת כי a נקודת רציפות של $g\circ f$, וכי f(a) היא נקודת רציפות של g. אז a נקודת רציפות של f.

ב. יכול להיות מצב שבו הנגזרת 'f לא תהיה שוה ל-0 בנקודת קיצון מקומי.

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y=a^{x+y}, (ab)^x=a^x b^x, \sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x}, a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy}, a^{-x}=\frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y \Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a, a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y, \qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y, \qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x, \qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

גבולות בסיסיים $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\left(\arccos(x)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\left(\arctan(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\left(\operatorname{arc}\cot(x)\right)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$\left(x^a\right)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$.(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V=\pi\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1; \qquad \sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$$\tan x\cdot\cot x=1; \qquad \tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}; \qquad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x} \qquad 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
:
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
:
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות
תשובה 1

$$f(x)=-9x^5+e^{2x}+8\sin x-3\cos x=e^{2x}(1-\frac{9x^5}{e^{2x}}+\frac{8\sin x}{e^{2x}}-\frac{3\cos x}{e^{2x}}).$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x^5}{e^{2x}}\doteq\lim_{x\to\infty}\frac{45x^4}{2e^{2x}}\doteq\lim_{x\to\infty}\frac{180x^3}{4e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{45x^3}{e^{2x}}\doteq\lim_{x\to\infty}\frac{135x^2}{2e^{2x}}\doteq\lim_{x\to\infty}\frac{135x}{2e^{2x}}\doteq\lim_{x\to\infty}\frac{135}{4e^{2x}}=0.$$

$$|\frac{8\sin x}{e^{2x}}-\frac{3\cos x}{e^{2x}}|\le|\frac{8\cdot1+3\cdot1}{e^{2x}}|.\lim_{x\to\infty}|\frac{8\sin x}{e^{2x}}-\frac{3\cos x}{e^{2x}}|\le\lim_{x\to\infty}\frac{11}{e^{2x}}=0.$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}e^{2x}(1-\frac{9x^5}{e^{2x}}+\frac{8\sin x}{e^{2x}}-\frac{3\cos x}{e^{2x}})=\infty(1-0+0)=\infty.$$

$$f(x)=-9x^5+e^{2x}+8\sin x-3\cos x=-x^5(9-\frac{e^{2x}}{x^5}-\frac{8\sin x}{x^5}+\frac{3\cos x}{x^5}).$$

$$\lim_{x\to-\infty}|-\frac{8\sin x}{x^5}+\frac{3\cos x}{x^5}|\le\lim_{x\to-\infty}\frac{11}{x^5}=0.\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{x^5}=\frac{0}{\infty}=0.$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}-x^5(9-\frac{e^{2x}}{x^5}-\frac{8\sin x}{x^5}+\frac{3\cos x}{x^5})=-(-\infty)^5(9+0+0)=\infty.$$

$$f(0)=-9\cdot0+1+8\cdot0-3\cdot1=-2$$

כיון ש f ערכה שלילי ב x=0 וחיובי כששואפים לפלוס מינוס אינסוף, אז יש ל f לפחות שני שרשים אחד חיובי ואחד שלילי.

תשובה 2 א

לפי משפט הסנדביץ

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{\sqrt{1+n^4}}+\frac{n}{\sqrt{2+n^4}}+\frac{n}{\sqrt{3+n^4}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n+n^4}})$$

$$\frac{n}{\sqrt{n+n^4}}\le\cdots\le\frac{n}{\sqrt{2+n^4}}\le\frac{n}{\sqrt{1+n^4}}.\frac{n^2}{\sqrt{n+n^4}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{k+n^4}}\le\frac{n^2}{\sqrt{1+n^4}}.$$

$$\frac{n^2}{\sqrt{n+n^4}}=\frac{\sqrt{n^4}}{\sqrt{n+n^4}}=\sqrt{\frac{n^4}{n+n^4}}=\sqrt{\frac{n^4/n^4}{n/n^4+n^4/n^4}}=\sqrt{\frac{1}{1/n^3+1}}.$$

$$\frac{n^2}{\sqrt{1+n^4}}=\frac{\sqrt{n^4}}{\sqrt{1+n^4}}=\sqrt{\frac{n^4}{1+n^4}}=\sqrt{\frac{n^4/n^4}{1/n^4+n^4/n^4}}=\sqrt{\frac{1}{1/n^4+1}}.$$

$$\sqrt{\frac{1}{1/n^3+1}}=\frac{n^2}{\sqrt{n+n^4}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{k+n^4}}\le\frac{n^2}{\sqrt{1+n^4}}=\sqrt{\frac{1}{1/n^4+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1/n^3+1}}=\sqrt{\frac{1}{0+1}}=1,\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1/n^4+1}}=\sqrt{\frac{1}{0+1}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{\sqrt{1+n^4}}+\frac{n}{\sqrt{2+n^4}}+\frac{n}{\sqrt{3+n^4}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n+n^4}})=1$$

תשובה 2 ב

:

$$\lim_{x\to\infty}(2e^{-6x}+8x^2+9e^{4x})^{\frac{7}{5x}}=(\infty+\infty+\infty)^0=\infty^0$$

$$2e^{-6x}+8x^2+9e^{4x}=9e^{4x}(\frac{2e^{-6x}}{9e^{4x}}+\frac{8x^2}{9e^{4x}}+1)=9e^{4x}(\frac{2}{9e^{10x}}+\frac{8x^2}{9e^{4x}}+1).$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2}{9e^{4x}}\doteq\lim_{x\to\infty}\frac{16x}{36e^{4x}}\doteq\lim_{x\to\infty}\frac{16}{144e^{4x}}=\frac{16}{\infty}=0.$$

$$(2e^{-6x}+8x^2+9e^{4x})^{\frac{7}{5x}}=(9e^{4x}(\frac{2}{9e^{10x}}+\frac{8x^2}{9e^{4x}}+1))^{\frac{7}{5x}}=9^{\frac{7}{5x}}(e^{4x})^{\frac{7}{5x}}(\frac{2}{9e^{10x}}+\frac{8x^2}{9e^{4x}}+1)^{\frac{7}{5x}}=$$

$$9^{\frac{7}{5x}}e^{4\frac{7}{5}}(\frac{2}{9e^{10x}}+\frac{8x^2}{9e^{4x}}+1)^{\frac{7}{5x}}.\lim_{x\to\infty}(2e^{-6x}+8x^2+9e^{4x})^{\frac{7}{5x}}=\lim_{x\to\infty}9^{\frac{7}{5x}}\cdot e^{\frac{28}{5}}\lim_{x\to\infty}(\frac{2}{9e^{10x}}+\frac{8x^2}{9e^{4x}}+1)^{\frac{7}{5x}}=$$

$$=9^0e^{\frac{28}{5}}1^0=e^{\frac{28}{5}}$$

תשובה 2 ג

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{8x^3-7x}{8x^3-5x^2-1})^{5+4x}=1^\infty=?$$

$$(\frac{8x^3-7x}{8x^3-5x^2-1}-1)(5+4x)=\frac{(8x^3-7x)-(8x^3-5x^2-1)}{8x^3-5x^2-1}(5+4x)=\frac{5x^2-7x+1}{8x^3-5x^2-1}(5+4x)=$$

$$=\frac{20x^3+krechtzen}{8x^3-5x^2-1}.L=\lim_{x\to\infty}\frac{20x^3+krechtzen}{8x^3-5x^2-1}=\frac{5}{2}.\lim_{x\to\infty}(\frac{8x^3-7x}{8x^3-5x^2-1})^{5+4x}=e^{\frac{5}{2}}$$

תשובה 3

$$\lim_{x\to4-}(x-4)^3=0-,\lim_{x\to4-}\frac{-6}{(2x-8)^3}=\frac{-6}{0-}=\infty,\lim_{x\to4-}7^{\frac{-6}{(2x-8)^3}}=7^\infty=\infty,\lim_{x\to4-}\frac{3}{6+7^{\frac{-6}{(2x-8)^3}}}=\frac{3}{6+\infty}=0.$$

$$\lim_{x\to4+}(x-4)^3=0,\lim_{x\to4+}\frac{-6}{(2x-8)^3}=\frac{-6}{0}=-\infty,\lim_{x\to4}7^{\frac{-6}{(2x-8)^3}}=7^{-\infty}=0,\lim_{x\to4}\frac{3}{6+7^{\frac{-6}{(2x-8)^3}}}=\frac{3}{6+0}=\frac{1}{2}$$

לכן ב $x=4$ יש נקודת קפיצה עבור f.

תשובה 4

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+6n-7}{4n^2+5n}=\frac{3}{4}.$$

$$\frac{3n^2+6n-7}{4n^2+5n}-\frac{3}{4}=\frac{(12n^2+24n-28)-(12n^2+15n)}{16n^2+20n}=\frac{12n-28}{16n^2+20n}.$$

$$(0\le 12n-28)\leftrightarrow(3\le n).(3\le n)\to[0\le\frac{12n-28}{16n^2+20n}\le\frac{12n}{16n^2+20n}\le\frac{12n}{16n^2}=\frac{3}{4n}].$$

$$(3\le n)\to 0\le\frac{3n^2+6n-7}{4n^2+5n}-\frac{3}{4}\le\frac{3}{4n}<\varepsilon\to\frac{3}{4\varepsilon}<n$$

תשובה 5

א: $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2}:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$

ב: $x=-1 \leftarrow x^3=-1 \leftarrow y=\frac{x^3+1}{x^2}=0$. לכן $(-1,0)$ נקודות חיתוך יחידה הצירים.

ג: זוגיות/אי-זוגיות ת"ה סימטרי, ובנוסף

$f(-x)=\frac{(-x)^3+1}{(-x)^2}=\frac{-x+1}{x^2}\neq[f(x)\vee(-f(x))]$. כלומר אין זוגיות או אי זוגיות.

ד: ה: ו

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2}:\ f'(x)=\frac{3x^2\cdot x^2-2x(x^3+1)}{(x^2)^2}=\frac{x^4-2x}{x^4}=\frac{x(x^3-2)}{x^4}=\frac{x(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})}{x^4}.$$

$$f''(x)=\frac{(4x^3-2)x^4-4x^3(x^4-2x)}{(x^4)^2}=\frac{6x^4}{x^8}=\frac{6}{x^4}$$

ולכן

	$(-\infty,0)$	$(0,\sqrt[3]{2})$	$(\sqrt[3]{2},\infty)$
$sign(f')$	$+$	$-$	$+$
$sign(f'')$	$+$	$+$	$+$

לכן בתחום הראשון f עולה ומחייכת, בשני יורדת ומחייכת, בשלישי עולה ומחייכת. לכן $(\sqrt[3]{2},\frac{3}{\sqrt[3]{4}})$ מינימום מקומי.

$$\lim_{x\to 0-}\frac{x^3+1}{x^2}=\frac{1}{0+}=\infty,\lim_{x\to 0+}\frac{x^3+1}{x^2}=\frac{1}{0+}=\infty$$

לכן x=0 ישר אסימפטוטה אנכית אליו העקום נדבק פעמיים. הפונקציה היא רציונלית ומספיק לבדוק את האסימפטוטה המשופעת ב-x=∞ בלבד, ואכן:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^2\cdot x}=1,\ f(x)-1x=\frac{x^3+1-x^3}{x^3}=\frac{1}{x^3}.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^2}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0.y=1x+0=x$$

כלומר y=x אסימפטוטה משופעת ב-$\pm\infty$

תשובה 6

א. לא נכון ולהלן דוגמא נגדית. נגדיר f(x) על ידי $f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & 0\le x\end{cases}$

ונגדיר $g(x)=x^2$ אז מתקיים כי $(g\circ f)(x)=g(f(x))=(\pm1)^2=1$ היא פונקציה קבועה אז 0 נקודת אי רציפות של f, היא נקודת רציפות של g והיא נקודת רציפות של פונקצית ההרכבה שהיא פונקציה קבועה.

דוגמא נגדית נוספת אותה g ו $f(x)=\begin{cases}-1-x & x<0\\ 1+x & 0\le x\end{cases}$

אם נחליף את f ו g בשתי הדוגמאות הקודמות נקבל הרכבה רציפה, פנימית רציפה וחיצונית שאיננה רציפה.

ב. נכון יכול להיות מצב שבו הנגזרת 'f לא תהיה שוה ל-0 בנקודת קיצון מקומי.

דוגמא ראשונה למשל בפונקציה |f(x)=|x‏ x=0 היא נקודת מינימום מקומי ומוחלט אבל 'f בכלל לא מוגדרת ב x=0, ולכן לא יכולה לשוות ל-0. דוגמא זו נלמדה כאשר דברנו אודות נקודת חוסר גזירות.

דוגמא שניה למשל בפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ x=0 היא נקודת מינימום מקומי ומוחלט אבל 'f בכלל לא מוגדרת ב x=0, ולכן לא יכולה לשוות ל-0. דוגמא זו נלמדה בשעור חזרה לפני המבחן