המכללה האקדמית נתניה
מבחן באינפי א' מועד א

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה
תאריך הבחינה: יום ו כא' טבת ה'תשע"ג 1-2-2013
משך הבחינה: <u>שעתיים וחצי</u>
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).
<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. א. נסח <u>והוכח</u> את משפט ערך הביניים של קושי. (30%)
מספיק להוכיח את המקרה f(a)<0<f(b)
ב. נתון $f(x)$ ו $g(x)$ מוגדרות ורציפות בקטע $[a,b]$ המקימות:
$f(b) > g(b)$ ו $f(a) < g(a)$.
הוכח כי קיימת נקודה c, $a < c < b$ כך שמתקיים: $f(c) = g(c)$.

2. חשב את שלושת הגבולות הבאים: (30%)

א: $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sin(n)+2^{2n}}{2^{2n+1}+5n^2}$$

ב: $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+7x)}{\tan(2x)}$$

ג: $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos^2(2x)}\right)^{\frac{1}{\sin^2(4x)}}$$

3. בדוק רציפות/ אי- רציפות של הפונקציה הבאה (16%)
בנקודה $x=\sqrt{3}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-6}{3-e^{\frac{3}{3-x^2}}} & x\neq\sqrt{3}\\ -2 & x=\sqrt{3}\end{cases}$$

4. הוכח או הפרך (אפשר להפריך בדוגמא נגדית) (12%)

א. אם $\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^2=9$ אז הסדרה a_n מתכנסת בהכרח.
ב. לכל פולינום מהצורה: $p(x)=x^4+bx-1$ כאשר b ממשי יש לפחות שני שורשים ממשיים.

5. הוכח כי כל סדרה a_n עולה וחסומה מתכנסת לחסם העליון שלה (12%)

.
בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x,e=2.718281828\ldots$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)'=ax^{a-1},\qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x);$$
$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$
$$(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx=C;$$
$$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C;$$
$$\int\cos xdx=\sin x+C;$$
$$\int\sin xdx=-\cos x+C;$$
$$\int e^xdx=e^x+C;$$
$$\int a^xdx=\frac{1}{\ln a}a^x+C;$$
$$\int x^adx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C,a\neq-1;$$
$$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C;$$
$$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C;$$
$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\arctan x+C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$
$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצאיות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

:

$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

:

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות

1-ב נביט על f-g. זוהי פונקציה רציפה כהפרש שתי פונקציות רציפות, ומקיימת כי $f(a)-g(a)<0<f(b)-g(b)$ ולכן לפי משפט קושי קימת נקודת בינים אחת לפחות שתסומן c כך ש
$f(c)-g(c)=0 \to f(c)=g(c)$

תשובה 2

א

:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sin(n)+2^{2n}}{2^{2n+1}+5n^2},\frac{2^{n+1}\sin(n)+2^{2n}}{2^{2n+1}+5n^2}=\frac{\frac{2^{n+1}\sin(n)+2^{2n}}{2^{2n}}}{\frac{2^{2n+1}+5n^2}{2^{2n}}}=\frac{\frac{\sin(n)}{2^{n-1}}+1}{2+\frac{5n^2}{2^{2n}}}.$$

הסדרה sin(n) חסומה, . $\frac{1}{2^{n-1}}$ שואפת ל-0, ולכן מכפלתן שואפת ל-0, גם המחובר השני במכנה שואף ל-0, ולכן הסדרה כולה שואפת ל-1/2 .

ב :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+7x)}{\tan(2x)},\frac{\ln(1+7x)}{\tan(2x)}=\frac{7}{2}\frac{\frac{\ln(1+7x)}{7x}}{\frac{\tan(2x)}{2x}},\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+7x)}{\tan(2x)}=\frac{7}{2}.$$

ג :

$$\left(\frac{1}{\cos^2(2x)}-1\right)\frac{1}{\sin^2(4x)}=\frac{1-\cos^2(2x)}{\sin^2(4x)}=\frac{\sin^2(2x)}{\sin^2(4x)}=\frac{\frac{\sin^2(2x)}{x^2}}{\frac{\sin^2(4x)}{x^2}},\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos^2(2x)}\right)^{\frac{1}{\sin^2(4x)}}=e^{\frac{2^2}{4^2}}=e^{\frac{1}{4}}.$$

תשובה 3

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-6}{3-e^{\frac{3}{3-x^2}}} & x\neq\sqrt{3}\\ -2 & x=\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{-6}{3-e^{\frac{3}{3-x^2}}}=?.\ \lim_{x\to 0+}3-x^2=0-,\ \lim_{x\to 0+}\frac{3}{3-x^2}=-\infty,\ \lim_{x\to 0+}e^{\frac{3}{3-x^2}}=0,\ \lim_{x\to 0+}\frac{-6}{3-e^{\frac{3}{3-x^2}}}=\frac{-6}{3}=-2,$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{-6}{3-e^{\frac{3}{3-x^2}}}=?.\ \lim_{x\to 0-}3-x^2=0+,\ \lim_{x\to 0+}\frac{3}{3-x^2}=\infty,\ \lim_{x\to 0+}e^{\frac{3}{3-x^2}}=\infty,\ \lim_{x\to 0+}\frac{-6}{3-e^{\frac{3}{3-x^2}}}=\frac{-6}{3-\infty}=0$$

לכן זו נקודת קפיצה.

תשובה 4. א

נביט על a_n אשר מוגדרת כ 2 עבור חלק מה- n –ים ואשר מוגדרת כ 4- עבור חלק אחר, נניח עבור הזוגיים והאי זוגיים. אז ברור שהסדרה איננה מתכנסת, אבל $1+a_n$ שוה ל ± 3 ולכן רבוע הסדרה היא הסדרה הקבועה 9 אשר מתכנסת, סתרנו את הטענה.

תשובה 4.ב

נכון כי p(0)=-1, וכן $\lim_{x\to\pm\infty}(x^4+bx-1)=\lim_{x\to\pm\infty}x^4(1+\frac{b}{x^3}-\frac{1}{x^4})=\infty(1+0-0)=\infty$ ולכן לפי תכונת ערך הבינים של קושי, יש לפולינום שרש חיובי ויש שרש שלילי.