המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף בקורס אינפי א –סמסטר סתו התשע"ו

יום ו, יט שבט ה'תשע"ו 29-1-2016

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה   המתרגל שגיא לוי.

משך הבחינה: שעתיים וחצי

חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

ענה על כל השאלות הבאות:

1. (20%)

א. נסח והוכח את משפט ערך הבינים של קושי (זה שכולל נגזרות).

ב. הוכח כי למשוואה $f(x)=e^x+2x-2$ יש שורש אחד בדיוק.

2. חשב שניים מתוך שלושת הגבולות הבאים: (18%)

א. $$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(\frac{2x-3}{x-1})}{e^{2x-4}-1}$$

ב. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\sin(1)+2\cdot\sin(2)+...+n\cdot\sin(n)}{n^{2.5}}$$

ג. $$\lim_{x\to 0}(1+2x^2)^{\frac{3}{1-\cos(2x)}}$$

3. (9%) לאילו ערכים של a,b הפונקציה הבאה תהיה רציפה וגזירה על כל הממשיים.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2x+b & x\le 1 \\ x^2+4x & 1<x \end{cases}$$

4. הוכח לפי הגדרת הגבול כי מתקיים : (10%)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1.5}=1$$

5. הוכח לפי הגדרת הנגזרת כי מתקיים : (9%)

$$(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$ (25%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

א : תחום הגדרה וטווח
ב : נקודות חיתוך עם הצירים.
ג : זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.
ד : תחומי עליה וירידה.
ה : נקודות קיצון.
ו : נקודות פיתול , תחומי קמירות כלפי מעלה וקמירות כלפי מטה.
ז : אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.
ח : שרטט את גרף הפונקציה.
ט : תמונה מדויקת

7. הוכח או הפרך (אפשר להפריך בדוגמא נגדית) (9%)

הוכח כי לכל $x>0$ מתקיים $\ln(x)<\sqrt{x}$

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),\quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ הוא $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, a^0 = 1,$$
$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו $0 < a, a \neq 1$.

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$
$$\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a \sqrt[y]{x} = \tfrac{1}{y} \cdot \log_a x;$$
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x} = x, \qquad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828...$$
$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

גבולות בסיסיים $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(\arcsin(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\left(\arcsin(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \left(x^a\right)'=ax^{a-1},\qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$

$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (e^x)'=e^x;$$

$$\left(\arccos(x)\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad (\cos x)'=-\sin x,\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$

$$\left(\arctan(x)\right)'=\frac{1}{1+x^2},\qquad (\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\left(\operatorname{arc}\cot(x)\right)'=-\frac{1}{1+x^2},\qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x);$$

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$

$$.(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx=C;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C;\ldots\ldots\ldots\ldots\int\cos xdx=\sin x+C;$$

$$\int\sin xdx=-\cos x+C;\ldots\ldots\int e^xdx=e^x+C;\ldots\ldots\ldots\ldots\int a^xdx=\frac{1}{\ln a}a^x+C;$$

$$\int x^adx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C,a\neq-1;..\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C;\ldots.\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin(\frac{x}{a})+C;\ldots..\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int(f(x)\pm d(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx=F(x)+C\Rightarrow\int f(ax+b)dx=\frac{F(ax+b)}{a}+C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

11.

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

:

$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

:

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות
תשובה 1 סעיף ב

$f(x)=e^x+2x-2$
נשים לב כי זו פונקציה אלמנטרית כחבור של כאלה, ומוגדרת לכל ממשי בתור חבור של כאלה. לכן הפונקציה רציפה וגזירה בכל תחום הגדרתה ובנוסף מתקיים $f(0)<0, f(1)>0$, ולכן לפי משפט ערך הביניים של קושי יש לה שורש אחד לפחות בקטע $[0,1]$. כמו כן $f'(x)=e^x+2$ אשר מקבלת בטווח ערכים חיוביים בלבד ולכן f עולה ולכן חח״ע ולכן הפתרון יחיד.

תשובה 2 א

$\frac{0}{0}=\frac{\ln(1)}{0}=\lim_{x\to2}\frac{\ln(\frac{2x-3}{x-1})}{e^{2x-4}-1}$ ולכן נפשט ונשתמש בכלל ל׳הופיטל ונקבל

$$\lim_{x\to2}\frac{\ln(\frac{2x-3}{x-1})}{e^{2x-4}-1}=\lim_{x\to2}\frac{\ln(2x-3)-\ln(x-1)}{e^{2x-4}-1}=\lim_{x\to2}\frac{\frac{2}{2x-3}-\frac{1}{x-1}}{2e^{2x-4}}=\frac{2-1}{2\cdot1}=\frac{1}{2}$$

תשובה 2 ב

לכל k מתקיים $-1\le\sin(k)\le1$ ולכן

$$-\frac{1+(1/n)}{2\sqrt{n}}\le\frac{1\cdot\sin(1)+2\cdot\sin(2)+...+n\cdot\sin(n)}{n^{2.5}}\le\frac{1+2+...+n}{n^{2.5}}=\frac{n(n+1)}{2n^{2.5}}=\frac{n+1}{2n^{1.5}}=\frac{1+(1/n)}{2\sqrt{n}}$$

ובנוסף מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{1+(1/n)}{2\sqrt{n}}=\frac{1+0}{\infty}=0$ ולכן לפי משפט הסנדביץ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\sin(1)+2\cdot\sin(2)+...+n\cdot\sin(n)}{n^{2.5}}=0$$
:

תשובה 2 ג

$\lim_{x\to0}(1+2x^2)^{\frac{3}{1-\cos(2x)}}=(1+0)^{\frac{3}{1-1^-}}=(1+0)^{\frac{3}{0^+}}=1^\infty$ ולכן

$$(1+2x^2)^{\frac{3}{1-\cos(2x)}}=(1+\frac{1}{1/2x^2})^{\frac{3}{1-\cos(2x)}}=(1+\frac{1}{1/2x^2})^{\frac{3(2x^2)}{(1-\cos(2x))2x^2}}=\{[(1+\frac{1}{1/2x^2})]^{1/2x^2}\}^{\frac{3(2x^2)}{1-\cos(2x)}}$$

ולכן $\lim_{x\to 0}(1+2x^2)^{\frac{3}{1-\cos(2x)}} = \lim_{x\to 0}\{[(1+\frac{1}{1/2x^2})]^{1/2x^2}\}^{\frac{3(2x^2)}{1-\cos(2x)}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{3(2x^2)}{1-\cos(2x)}}$ ונחשב

ונקבל $\lim_{x\to 0}\frac{3(2x^2)}{1-\cos(2x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{12x}{2\sin(2x)} = 3\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(2x)} = 3$ ולכן $\lim_{x\to 0}\frac{3(2x^2)}{1-\cos(2x)} = e^3$

תשובה 3

.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2x+b & x\le 1 \\ x^2+4x & 1<x \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2ax-2 & x<1 \\ 2x+4 & 1<x \end{cases}$$

ולכן כדי $\lim_{x\to 1-} ax^2-2x+b = a+b-2, \lim_{x\to 1+} x^2+4x=5$

$$\lim_{x\to 1-} 2ax-2 = 2a-2, \lim_{x\to 1+} 2x+4=6$$

שהפונקציה תהיה רציפה וגזירה מתקיים כי

$$a+b-2=5, 2a-2=6 \Rightarrow a=4, b=3$$

תשובה 4

ולכן $(\frac{n}{n+1})^{1.5} < 1^{1.5} = 1$

$$0<1-(\frac{n}{n+1})^{1.5}<\varepsilon \Leftrightarrow 1-\varepsilon<(\frac{n}{n+1})^{1.5} \Leftrightarrow (1-\varepsilon)^{2/3}<\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}<1-(1-\varepsilon)^{2/3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-(1-\varepsilon)^{2/3}}<n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-(1-\varepsilon)^{2/3}}-1<n$$

דרך אחרת יותר ארוכה

$$(\frac{n}{n+1})^{1.5}-1=\frac{((\frac{n}{n+1})^{1.5}-1)((\frac{n}{n+1})^{1.5}+1)}{((\frac{n}{n+1})^{1.5}+1)}=\frac{((\frac{n}{n+1})^{3}-1)}{((\frac{n}{n+1})^{1.5}+1)}=\frac{(n^3-(n+1)^3)(n+1)^{1.5}}{(n+1)^3(n^{1.5}+(n+1)^{1.5})}=$$

$$=\frac{(n^3-(n^3+3n^2+3n+1))}{(n+1)^{1.5}(n^{1.5}+(n+1)^{1.5})}=\frac{-3n^2-3n-1}{(n+1)^{1.5}(n^{1.5}+(n+1)^{1.5})}$$

$$|(\frac{n}{n+1})^{1.5}-1|=|\frac{-3n^2-3n-1}{(n+1)^{1.5}(n^{1.5}+(n+1)^{1.5})}|=\frac{3n^2+3n+1}{(n+1)^{1.5}(n^{1.5}+(n+1)^{1.5})}\le\frac{7n^2}{n^{1.5}(n^{1.5}+n^{1.5})}=$$

$$=\frac{7n^2}{n^{1.5}2n^{1.5}}=\frac{7n^2}{2n^3}\le\frac{7}{2n},(\frac{7}{2n}<\varepsilon)\Leftrightarrow(\frac{7}{2\varepsilon}<n).(\frac{7}{2\varepsilon}<n)\Rightarrow|(\frac{n}{n+1})^{1.5}-1|<\varepsilon$$

תשובה 5

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\frac{(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x})}{h}\frac{(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x})}=$$

$$=\frac{x+h-x}{h}\frac{(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x})}=\frac{h}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x})}=$$

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x})}$$

ולכן

$$(\sqrt[3]{x})'=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(x+h)}-\sqrt[3]{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x})}=$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

תשובה 6

ב: הפונקציה $f(x)=\ln(\frac{x^2}{x+2})$ מוגדרת כאשר המשתנה של ln הוא חיובי,

$(\frac{x^2}{x+2}>0)\Leftrightarrow x^2(x+2)>0)\Leftrightarrow(x+2>0,x\neq 0)\Leftrightarrow D=(-2,0)\cup(0,\infty)$ ועל הטוח כרגע נומר כי הוא כל הממשיים. אי אפשר לדבר על זוגיות כי ת״ה איננו סימטרי.

x=0 איננו בתחום ההגדרה ולכן נותר רק y=0, נקבל לכן

$f(x)=\ln(\frac{x^2}{x+2})=0\Rightarrow\frac{x^2}{x+2}=1\Rightarrow x^2=x+2\Rightarrow x=-1,x=2$ לכן $(-1,0),(2,0)$ נקודות חיתוך עם הצירים.

ד: ה: ו

$$f(x)=\ln(\frac{x^2}{x+2})=2\ln(x)-\ln(x+2),\ f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{2(x+2)-x}{x(x+2)}=\frac{x+4}{x(x+2)}$$

$$f''=\frac{1\cdot x(x+2)-(x+2+x)(x+4)}{x^2(x+2)^2}=\frac{1\cdot x(x+2)-(2x+2)(x+4)}{x^2(x+2)^2}=$$

$$=\frac{(x^2+2x)-(2x^2+10x+8)}{x^2(x+2)^2}=\frac{-x^2-8x-8}{x^2(x+2)^2}=-\frac{(x+4+\sqrt{2})(x+4-\sqrt{2})}{x^2(x+2)^2}$$

ולכן הנקודות בהן חל שנוי הן $x=-4-\sqrt{2},x=-4+\sqrt{2},x=-4,x=-2,x=0$, מהן -4 $x=-4-\sqrt{2},x=-4$ אינן בתחום ההגדרה. בקטע 0 עד אינסוף f עולה, בקטע -2 עד 0 f יורדת היא בוכה כאשר $x>-4+\sqrt{2}$, מחייכת כאשר $x<-4+\sqrt{2}$, וב $x=-4+\sqrt{2}$ 3 יש נקודת פתול. כעת נבדוק אסימפטוטות. כאשר x שואף לאינסוף נקבל

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{2\ln(x)-\ln(x+2)}{x}.\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{2\ln(x)-\ln(x+2)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2/x-1/(x+2)}{1}=\frac{0-0}{1}=0=a$$

נציב לחשב את b ונקבל $b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-0x)=\lim_{x\to\infty}\ln(\frac{x^2}{x+2})=\ln(\infty)=\infty$ ולכן לא

קיימת אסימפטוטה משופעת. נחשב שלשה גבולות חד צדדיים כדי לומר אודות

$$\lim_{x\to -2+}\ln(\frac{x^2}{x+2})=\lim_{x\to -2+}\ln(\infty)=\infty,$$

$$\lim_{x\to 0-}\ln(\frac{x^2}{x+2})=\lim_{x\to 0+}\ln(x)=-\infty,$$ אסימפטוטות אנכיות.

$$\lim_{x\to 0+}\ln(\frac{x^2}{x+2})=\lim_{x\to 0+}\ln(x)=-\infty$$

כיון שבקטע מ-0 עד אינסוף f עולה בערכי y שלה ממינוס אינסוף עד אינסוף, אז התמונה המדויקת היא כל הממשיים.

תשובה 7

8. נכון נביט ב $\sqrt{x}-\ln(x)$ ונוכיח כי היא תמיד חיובית. נגזרתה היא

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{x}})=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

הנגזרת שלילית בקטע $[0,4]$ וחיובית בקרן מ4 עד אינסוף,ולכן ב $x=4$ יש מינימום מקומי ומוחלט, נציב את $x=4$ ונקבל $\sqrt{4}-\ln(4)$ שהוא בטוי חיובי ולכן פונקצית ההפרש חיובית תמיד, כדרוש.