המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>מבחן סוף בקורס אינפי א –סמסטר סתו התשע"ז</u>

מועד א יום ו, יג אדר ה'תשע"ז 10-3-2017

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה המתרגלים ד"ר אורי פנקס משה פדרבוש.

משך הבחינה: <u>שעתיים וחצי</u>
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).
<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. (20%)

א. נסח <u>והוכח</u> את משפט ROLLE

ב. הוכח כי לכל x מתקיים $1+x \le e^x$.

2. חשב שניים מתוך שלושת הגבולות הבאים: (18%)

א. $\lim_{x\to 2} \frac{1}{\sin(x-2)} - \frac{1}{x-2}$

ב. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!+(n+2)!+...+(2n)!}{(2n+2)!}$

ג. $\lim_{x\to 1} x^{\frac{3x}{x^2-1}}$

טל: 8607777 (972-9) :Tel פקס: 8844439 (972-9) :Fax

3. (9%) מצא נקודות אי רציפות לפונקציה הבאה וסווג אותן

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{14}{5+2^{\frac{\sin(x)}{|x|}}} & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$$

4. הוכח לפי הגדרת הגבול כי מתקיים : (9%)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2+5n-2}{8n^2+9}=\frac{7}{8}$$

5. הוכח כי לפונקציה $p(x)=x^4+2^x+1000x+5\cos x$ יש לפחות שני שרשים ממשיים. (9%)

6. הוכח לפי הגדרת הנגזרת כי מתקיים $(e^x)'=e^x$: (10%)
(מותר להסתמך על הגבולות שנאמרו בכתה על ידי המתרגלים).

7. נתונה הפונקציה $f(x)=(\ln(x))^2-4$ (25%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

א : תחום הגדרה וטווח
ב : נקודות חיתוך עם הצירים.
ג : זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.
ד : תחומי עליה וירידה.
ה : נקודות קיצון.
ו : נקודות פיתול , תחומי קמירות כלפי מעלה וקמירות כלפי מטה.
ז : אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.
ח : שרטט את גרף הפונקציה.
ט : תמונה מדויקת

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x,e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

גבולות בסיסיים $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(\arcsin(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\left(\arcsin(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \left(x^a\right)'=ax^{a-1},\qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$

$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (e^x)'=e^x;$$

$$\left(\arccos(x)\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad (\cos x)'=-\sin x,\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$

$$\left(\arctan(x)\right)'=\frac{1}{1+x^2},\qquad (\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\left(\operatorname{arc}\cot(x)\right)'=-\frac{1}{1+x^2},\qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x);$$

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$

$$.\,(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx=C;\ldots\ldots\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C;\ldots\ldots\int\cos xdx=\sin x+C;$$

$$\int\sin xdx=-\cos x+C;\ldots\ldots\int e^x dx=e^x+C;\ldots\ldots\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C;$$

$$\int x^a dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C,a\neq-1;..\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C;\ldots\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin(\frac{x}{a})+C;\ldots\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int(f(x)\pm d(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx=F(x)+C\Rightarrow\int f(ax+b)dx=\frac{F(ax+b)}{a}+C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta).$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta).$$:
$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha)=\frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha)=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha)=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2})=\frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2})=\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$:
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

:

פתרונות

תשובה 1 סעיף ב

$1+x\le e^x$

נגדיר $f(x)=e^x-1-x$ ועלינו להוכיח כי הטווח שלה היא קבוצת הממשיים האי שליליים. ונבצע עבורה חקירה חלקית. אז $f'(x)=e^x-1$ והיא מתאפסת כאשר x=0. נציב נקודה חיובית ושלילית ונקבל כי f יורדת עבור x ים שליליים ועולה עבור x ים חיוביים ולכן x=0 היא נקודת מינימום מקומי ומוחלט. נציב ערך זה ב f ונקבל f(0)=0. לכן הפונקציה f תמיד הינה אי שלילית כדרוש.

תשובה 2 א

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sin(x-2)}-\frac{1}{x-2}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sin(t)}-\frac{1}{t}=\frac{1}{\sin(0)}-\frac{1}{0}=\pm\infty-\pm\infty=?$$

ולכן נפשט ונשתמש בכלל ל'הופיטל ונקבל

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sin(t)}-\frac{1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin(t)}{t\sin(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin(t)}{t^2}\frac{t}{\sin(t)}=1\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin(t)}{t^2}\doteq\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{2t}=\frac{0}{0}\doteq\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{2}=0$$

תשובה 2 ב

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+(n+2)!+\ldots+(2n)!}{(2n+2)!}=?,0\le\frac{(n+1)!+(n+2)!+\ldots+(2n)!}{(2n+2)!}\le\frac{n(2n)!}{(2n+2)!}=\frac{n(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}=$$

$$=\frac{n}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{n}{2n^2+6n+2},\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n^2+6n+2}=0\to\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+(n+2)!+\ldots+(2n)!}{(2n+2)!}=0$$

תשובה 2 ג

$\lim_{x\to 1}x^{\frac{3x}{x^2-1}}=(1)^{\frac{3}{0^+}}=1^\infty$ ולכן

$$x^{\frac{3x}{x^2-1}}=(1+x-1)^{\frac{3x}{x^2-1}}=(1+x-1)^{\frac{3x(x-1)}{(x-1)(x^2-1)}}=[(1+x-1)^{\frac{1}{(x-1)}}]^{\frac{3x}{(x+1)}}$$

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{3x}{x^2-1}}=\lim_{x\to 1}[(1+x-1)^{\frac{1}{(x-1)}}]^{\frac{3x}{(x+1)}}=e^{\lim_{x\to 1}\frac{3x}{(x+1)}}=e^{\frac{3}{2}}$$

תשובה 3

.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin(x)}{|x|}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin(x)}{x}=1,\lim_{x\to 0-}\frac{\sin(x)}{|x|}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin(x)}{-x}=-1,\lim_{x\to 0+}5+2^{\frac{\sin(x)}{|x|}}=5+2^1=7,$$

$$\lim_{x\to 0-}5+2^{\frac{\sin(x)}{|x|}}=5+2^{-1}=5.5,\lim_{x\to 0+}\frac{14}{5+2^{\frac{\sin(x)}{|x|}}}=\frac{14}{7}=2,\lim_{x\to 0-}\frac{14}{5+2^{\frac{\sin(x)}{|x|}}}=\frac{14}{5.5}=\frac{28}{11}$$

ולכן לפונקציה יש אי רציפות מסוג ראשון (קפיצה).

תשובה 4

$$\frac{7n^2+5n-2}{8n^2+9}-\frac{7}{8}=\frac{56n^2+40n-16}{8(8n^2+9)}-\frac{56n^2+63}{8(8n^2+9)}=\frac{40n-79}{8(8n^2+9)},\left|\frac{7n^2+5n-2}{8n^2+9}-\frac{7}{8}\right|=\left|\frac{40n-79}{8(8n^2+9)}\right|.$$

$$(n>2)\to\left|\frac{7n^2+5n-2}{8n^2+9}-\frac{7}{8}\right|=\frac{40n-79}{8(8n^2+9)}<\frac{40n}{8(8n^2+9)}=\frac{5n}{8n^2+9}<\frac{5n}{8n^2}=\frac{5}{8n}<\varepsilon\to\frac{5}{8\varepsilon}<n$$

$$(n>\max\{\frac{5}{8\varepsilon},2\})\to\left|\frac{7n^2+5n-2}{8n^2+9}-\frac{7}{8}\right|<\varepsilon$$

תשובה 5

הפונקציה $p(x)=x^4+2^x+1000x+5\cos x$ נציב ונקבל
f(0)=6,f(-1)=1+0.5-1000+5sin<-990. כיון שהפונקציה
יסודית היא רציפה בכל תחום הגדרתה כלומר בכל הממשיים
ולכן יש שרש אחד בקטע [-1,0]. ובנוסף

$$\lim_{x\to-\infty}p(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^4+2^x+1000x+5\cos x)=\lim_{x\to-\infty}x^4(1+\frac{2^x}{x^4}+\frac{1000x}{x^4}+\frac{5\cos x}{x^4}).$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{x^4}=\frac{2^{-\infty}}{(-\infty)^4}=\frac{0}{\infty}=0,\lim_{x\to-\infty}\frac{1000x}{x^4}=\frac{1000}{(-\infty)^3}=\frac{1000}{-\infty}=0,\left|\frac{5\cos x}{x^4}\right|\le\frac{5}{x^4},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x^4}=0\to\lim_{x\to-\infty}\frac{5\cos x}{x^4}=0,\lim_{x\to-\infty}p(x)=(-\infty)^4(1+0+0+0)=\infty$$

ולכן לפונקציה יש שרש נוסף בקרן $(-\infty,-1)$

תשובה 6

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^xe^h-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot 1=e^x$$

תשובה 7

א. : הפונקציה $f(x)=[\ln(x)]^2-4$ מוגדרת כאשר המשתנה של ln הוא חיובי, ולכן זוהי פונקציה $f(x):(0,\infty)\to(-4,\infty)$. אי אפשר לדבר על זוגיות כי ת"ה איננו סימטרי. x=0 איננו בתחום ההגדרה ולכן נותר רק y=0, נקבל לכן $f(x)=[\ln(x)]^2-4=0\Rightarrow\ln(x)=\pm2\Rightarrow x=e^2,e^{-2}$ לכן $(e^2,0),(e^{-2},0)$ נקודות חיתוך עם הצירים.

ד : ה : ו

$$f(x)=[\ln(x)]^2-4,\ f'(x)=\frac{2\ln(x)}{x},\ f''=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-2\ln(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{2-2\ln(x)}{x^2}=2\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

ולכן הנקודות בהן חל שנוי הן x=0,x=1,x=e. בקטע 0 עד 1 f יורדת, בקטע 1 עד אינסוף f עולה היא בוכה כאשר x>e, מחייכת כאשר 0<x<e, ו x=e היא נקודת פתול. כעת נבדוק אסימפטוטות. כאשר x שואף לאינסוף נקבל

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{[\ln(x)]^2-4}{x}.\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\doteq\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln(x)}{x}\doteq\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0=a$$

נציב לחשב את b ונקבל $b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-0x)=\lim_{x\to\infty}[\ln(x)]^2-4=\infty^2-4=\infty$ ולכן לא קיימת אסימפטוטה משופעת. נחשב גבול חד צדדי כדי ללמוד אודות אסימפטוטות אנכיות. $\lim_{x\to0+}[\ln(x)]^2-4=(-\infty)^2=\infty$ לכן x=0 הוא ישר אסימפטוטה אנכית. כיון שבקטע מ-0 עד 1 f יורדת מ אינסוף עד 0 ובקטע מ-1 עד אינסוף עולה מ-0 לאינסוף התמונה המדויקת היא $[0,\infty)$