המכללה האקדמית נתניה

מבחן באינפי א' מועד ב'

מורי הקורס : ד"ר גיורא דולה, משה פדרבוש
תאריך הבחינה : יום ד ג' אדר ב ה'תשע'א, 9-3-2011
משך הבחינה : שעתיים וחצי
חומר עזר : מחשבון (לא גרפי).
ענה על כל השאלות הבאות :

1. א. נסח והוכח את משפט רול. (30%)

ב. בדוק את קיום משפט רול עבור פונקציה : $f(x)=\sqrt[5]{(3x-4)^4}$

בקטע $[0,\frac{8}{3}]$.

2. חשב שניים משלושת הגבולות הבאים : (20%)

א : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{\sin^2 2x}\right)$

ב : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-\tan x}{\cos x-\frac{1}{\cos x}}\right)$

ג : $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{7x^2-3x+7}{7x-5\sqrt{x}-9}\right)^{7x-2}$

3. על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות "נכון" או "לא נכון" ולנמק נמוק קצר. הנמוק הקצר יכול להיות דוגמא נגדית. את התשובה יש לכתוב בשאלון. (21%)

א. אם $f(x)$ גזירה בקטע $[a,b]$ ואם נגזרתה אינה מתאפסת בקטע זה, אזי אין ל $f(x)$ מקסימום מקומי בקטע.

נכון לא נכון

נימוק קצר

ב. אם $f(x)$ מונוטונית עולה ממש, אזי היא בהכרח חד חד ערכית.

נכון לא נכון

נימוק קצר

ג. לפונקציה הבאה יש אי- רציפות סליקה בנקודה $x=1$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{8}{4-e^{\frac{-2}{3x^2-3}}} & x\neq 1 \\ 10 & x=1 \end{cases}$$

נכון לא נכון

נימוק קצר

4. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ (30%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א: תחום הגדרה

ב: נקודות חיתוך עם הצירים.

ג: זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.

ד: תחומי עליה וירידה ונקודות קריטיות.

ה: נקודות קיצון.

ו: נקודות פיתול, תחומי קמירות וקעירות.

ז: אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.

ח: שרטט את גרף הפונקציה.

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ $\left(a \neq 0 \right)$ הוא $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, a^0 = 1,$$
$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו $0 < a, a \neq 1$.

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$
$$\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a \sqrt[y]{x} = \tfrac{1}{y} \cdot \log_a x;$$
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x} = x, \qquad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828\ldots$$
$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$
$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x;$$
$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$
$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$
$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

11.

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha)=\frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha)=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha)=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2})=\frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2})=\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
:
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
:
$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

תשובות

1-ב נביט בפונקציה $f(x)=\sqrt[5]{(3x-4)^4}$ בקטע [0,8/3] . אז מתקיים $f(0)=f(8/3)=4^{0.8}$ והפונקציה f רציפה בכל תחום הגדרתה כיון שהיא אלמנטרית, ותחום הגדרתה הוא כל הממשיים. אבל $f'(x)=0.8(3x-4)^{-0.2}$

איננה מוגדרת בנקודה 4/3 אשר נמצאת באמצע הקטע, ולכן לא מתקיימים תנאי משפט רול ולכן גם המסקנה לא חיבת להתקיים. גם המסקנה לא מתקיימת כיון ש $f'(x)=0.8(3x-4)^{-0.2}=\frac{0.8}{(\sqrt[5]{3x-4})^2}$ היא תמיד חיובית, ולעולם לא מתאפסת.

2-א:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{\sin^2 2x}\right)=?,\ \frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{\sin^2 2x}=\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^{-2}\sin^2 2x}=\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2}=\frac{x\sin\frac{1}{x}}{4\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2}.\ |\sin\frac{1}{x}|\le 1.$$

$$\left|\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{\sin^2 2x}\right|\le\left|\frac{x}{4\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2}\right|.\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{4\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2}=\frac{0}{4\cdot 1^2}=0,\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{\sin^2 2x}\right)=0.$$

ב:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-\tan x}{\cos x-\frac{1}{\cos x}}\right)=?,\ \frac{\sin x-\tan x}{\cos x-\frac{1}{\cos x}}=\frac{\cos x\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}{\cos^2 x-1}=\frac{\sin x(\cos x-1)}{\cos^2 x-1}=\frac{\sin x}{\cos x+1}.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-\tan x}{\cos x-\frac{1}{\cos x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\cos x+1}\right)=\frac{0}{2}=0.$$

ג:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7x^2-3x+7}{7x-5\sqrt{x}-9}\right)^{7x-2},\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(7x-3+7/x)}{x(7-5/\sqrt{x}-9/x)}\right)=\frac{\infty-3+0}{7-0-0}=\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7x^2-3x+7}{7x-5\sqrt{x}-9}\right)^{7x-2}=\infty^\infty=\infty.$$

3. על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות "נכון" או "לא נכון" ולנמק נמוק קצר. הנמוק הקצר יכול להיות דוגמא נגדית. את התשובה יש לכתוב בשאלון. (21%)

א: אם $f(x)$ גזירה בקטע $[a,b]$ ואם נגזרתה אינה מתאפסת בקטע זה, אזי אין ל $f(x)$ מקסימום מקומי בקטע.

נכון לא נכון

נימוק קצר

תשובה: נכון . כיון שבנקודת מקסימום מקומית אם יש נגזרת ערכה צריך להיות אפס.

ב. אם $f(x)$ מונוטונית עולה ממש, אזי היא בהכרח חד חד ערכית.

כן כיון שאם a≠b , אז בה"כ a<b ואז f(a)<f(b) ואז f(a)≠f(b) .

ב. לא נכון כיון ש

$$\lim_{x\to 1+}(3x^2-3)=0+, \lim_{x\to 1-}(3x^2-3)=0, \lim_{x\to 1+}\frac{-2}{3x^2-3}=-\infty, \lim_{x\to 1-}\frac{-2}{3x^2-3}=\infty, \lim_{x\to 1+}e^{\frac{-2}{3x^2-3}}=0, \lim_{x\to 1-}e^{\frac{-2}{3x^2-3}}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{8}{4-e^{\frac{-2}{3x^2-3}}}=2, \lim_{x\to 1-}\frac{8}{4-e^{\frac{-2}{3x^2-3}}}=0$$

ולכן x=1 היא נקודת קפיצה.

4. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ (30%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א: תחום הגדרה

ב: נקודות חיתוך עם הצירים.

ג: זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.

ד: תחומי עליה וירידה ונקודות קריטיות.

ה: נקודות קיצון.

ו: נקודות פיתול , תחומי קמירות וקעירות.

ז: אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.

ח: שרטט את גרף הפונקציה.

תשובה :

א. ת״ה $\mathbb{R}-\{-1\}$. ב. $y=0 \to x=1$ וכמו כן $x=0 \to y=-1$ לכן נקודות החתוך הן (1,0),(0,-1). ג. ת״ה איננו סימטרי ולכן זו פונקציה כללית. ד,ה,ו

$$f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2},\ f'(x)=\frac{3(x-1)^2(x+1)^2-2(x+1)(x-1)^3}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)(x-1)^2[3x+3-2(x-1)]}{(x+1)^4}=\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3},$$

$$f''(x)=\frac{[2(x-1)(x+5)+(x-1)^2](x+1)^3-3(x+1)^2(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^6}=$$

$$=\frac{(x+1)^2(x-1)[(2(x+5)+(x-1))(x+1)-3(x-1)(x+5)]}{(x+1)^6}=\frac{(x-1)[(3x+9)(x+1)-3(x-1)(x+5)]}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{3(x-1)[x^2+4x+3-x^2-4x+5]}{(x+1)^4}=\frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$$

נקודות קריטיות -5,-1,1. נציגים -6,-2,0,2. נקבל את טבלת סימני הנגזרות.

	(-∞,-5)	(-5,-1)	(-1,1)	(1,∞)
סימן של y'	+	-	+	+
סימן של y''	-	-	-	+
התנהגות y	עולה ובוכה	יורדת ובוכה	עולה ובוכה	עולה ומחייכת

ולכן (-5,-13.5) נקודת מקסימום מקומית, (1,0) נקודת פתול. אסימפטוטות אנכיות רק אפשריות עבור x=-1. מתקיים כי $\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=\frac{-8}{0+}=-\infty$ ולכן אכן x=-1 ישר אסימפטוטה אנכית אליו העקום נדבק משני הצדדים. עבור אסימפטוטה משופעת ב$\pm\infty$, נקבל

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1,\ f(x)-ax=\frac{(x-1)^3-(x+1)^2x}{(x+1)^2}=\frac{x^3-3x^2+3x-x-2x^2-x^3}{(x+1)^2}=\frac{-5x^2+2x}{(x+1)^2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-5x^2+2x}{(x+1)^2}\right)=-5,\ y=1x-5=x-5$$

כלומר קבלנו ישר אסימפטוטה משופעת ב$\pm\infty$.