המכללה האקדמית נתניה

מבחן באינפי א׳ מועד ב׳

שם המרצה: ד״ר גיורא דולה
תאריך הבחינה: יום ד כד אדר ב התשעד 26-3-2014
משך הבחינה: <u>שעתיים וחצי</u>
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).
<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. א. נסח <u>והוכח</u> את משפט ערך הממוצע של לגראנז׳. (20%)

2. חשב את שלושת הגבולות הבאים: (30%)

א:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{3+n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}\right)$$

ב:

$$\lim_{x\to\infty}(3e^{7x}+5x^2+6)^{\frac{1}{x}}$$

ג:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-6x+3}{5x^2-5x+4}\right)^{-8x+9}$$

3. בדוק רציפות/ אי- רציפות של הפונקציה הבאה בנקודה $x=2$ וקבע את סוגה במקרה של אי רציפות. (15%)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{12}{3+e^{\frac{-2}{(3x-6)^2}}} & x\neq 2\\ 0 & x=2\end{cases}$$

4. הוכח או הפרך (אפשר להפריך בדוגמא נגדית) (10%)

א. אם $\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^2=7$ אז הסדרה a_n מתכנסת בהכרח.

ב. לפולינום מדרגה 3 יש בדיוק נקודת פיתול אחת.

5. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$ (25%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א: תחום הגדרה

ב: נקודות חיתוך עם הצירים.

ג: זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.

ד: תחומי עליה וירידה.

ה: נקודות קיצון.

ו: נקודות פיתול, תחומי קמירות כלפי מעלה וקמירות כלפי מטה.

ז: אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.

ח: שרטט את גרף הפונקציה.

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y, \qquad \log_a x^y = y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y, \qquad \log_a \sqrt[y]{x} = \tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x, \qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

גבולות בסיסיים $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1, \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1, \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(\arcsin(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\left(\arcsin(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\left(\arccos(x)\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\left(\arctan(x)\right)'=\frac{1}{1+x^2},$$
$$\left(\operatorname{arc}\cot(x)\right)'=-\frac{1}{1+x^2},$$

$$\left(x^a\right)'=ax^{a-1}, \qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x, \qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x, \qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x);$$
$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$
$$.(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S=\int_a^b (g(x)-f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V=\pi\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad \sin^2 x+\cos^2 x=1;$$

$$\tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad \tan x\cdot\cot x=1;$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\qquad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad 1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות :

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha)=\frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha)=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha)=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2})=\frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2})=\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
:
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
:
$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות

תשובה 2.

א:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{3+n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}\right)$$

$$\frac{n}{\sqrt{n+n^2}}\le\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{3+n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}\le\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}\to$$

$$\frac{1}{\sqrt{1/n+1}}\le\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{3+n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}\le\frac{1}{\sqrt{1/n^2+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1/n+1}}=1,\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1/n^2+1}}=1\to\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{3+n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}\right)=1.$$

ב:

$$\lim_{x\to\infty}(3e^{7x}+5x^2+6)^{\frac{1}{x}}=\infty^0,e^{\ln((3e^{7x}+5x^2+6)^{\frac{1}{x}})}=e^{\frac{\ln(3e^{7x}+5x^2+6)}{x}}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(3e^{7x}+5x^2+6)}{x}\doteq\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{21e^{7x}+10x}{3e^{7x}+5x^2+6}}{1}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{21e^{7x}+10x}{3e^{7x}+5x^2+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{21+\frac{10x}{e^{7x}}}{3+\frac{5x^2}{e^{7x}}+\frac{6}{e^{7x}}}=\frac{21+0}{3+0+0}=7,\lim_{x\to\infty}(3e^{7x}+5x^2+6)^{\frac{1}{x}}=e^7$$

ג:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-6x+3}{5x^2-5x+4}\right)^{-8x+9}=1^{-\infty}.(f(x)-1)g(x)=\left(\frac{5x^2-6x+3}{5x^2-5x+4}-1\right)(9-8x)=\frac{(-x-1)}{5x^2-5x+4}(9-8x)=$$

$$=\frac{8x^2-x-9}{5x^2-5x+4},\lim_{x\to\infty}(f(x)-1)g(x)=\frac{8}{5},\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-6x+3}{5x^2-5x+4}\right)^{-8x+9}=e^{8/5}$$

תשובה 3

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{12}{3+e^{\frac{-2}{(3x-6)^2}}} & x\neq 2\\ 0 & x=2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2\pm}(3x-6)^2=0+,\lim_{x\to 2\pm}\frac{-2}{(3x-6)^2}=-\infty,\lim_{x\to 2\pm}e^{\frac{-2}{(3x-6)^2}}=0,\lim_{x\to 2\pm}\frac{12}{3+e^{\frac{-2}{(3x-6)^2}}}=4$$

ולכן x=2 היא נקודת אי רציפות סליקה עבור f.

תשובה 4

א. הסדרה $a_n=-1+\sqrt{7}(-1)^n$ איננה מתכנסת אבל מקיימת כי
$\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^2 = 7$

ב. נתונה $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ אז
$f'(x)=3ax^2+2bx+c,\ f''(x)=6ax+2b$, ואז נפריד לשני מקרים. אם a>0, אז יש תחום קמירות $\frac{b}{3a}<x$ תחום קעירות $\frac{b}{3a}>x$ ונקודת פתול יחידה $\frac{b}{3a}=x$. אם a<0, אז תחומי הקמירות והקעירות מתחלפים אבל נשארת אותה נקודת פתול יחידה.

תשובה 5

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א: $f(x)=f(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$

ב: $x=0\to y=-3.y=0\to x=1,-3$ לכן (0,-3),(1,0),(-3,0) נקודת חיתוך עם הצירים.

ג: זוגיות/אי-זוגיות אין כי ת"ה איננו סימטרי.

ד: ה: ו

$$f(x)=f(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}\ f'(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x-3)}{(x+1)^4}=\frac{2(x+1)4}{(x+1)^4}=\frac{8}{(x+1)^3}$$

$$f''(x)=\frac{-24}{(x+1)^4}$$

ולכן

range	$(-\infty,-1)$	$(-1,\infty)$
$\mathrm{sign}(f')$	$-$	$+$
$\mathrm{sign}(f'')$	$-$	$-$

לכן בתחום הראשון f יורדת ובוכה, בשני עולה ובוכה.

$$\lim_{x\to-1-}\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{-2}{0+}=-\infty,\ \lim_{x\to-1+}\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{-2}{0+}=-\infty$$

לכן x=-1 ישר אסימפטוטה אנכית אליו העקום נדבק פעמיים. הפונקציה היא רציונלית ומספיק לבדוק את האסימפטוטה המשופעת ב-x=∞ בלבד, ואכן:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2x}=0,\ f(x)-0x=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

$$b=\lim_{x\to}\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=1.y=0x+1=1.$$

כלומר y=1 אסימפטוטה משופעת ב-±∞