המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף בקורס אינפי א –מועד ב–סמסטר סתו התשע"ה

יום ב, י ניסן ה'תשע"ה 30-3-2015

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה

משך הבחינה: שעתיים וחצי

חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

עגה על כל השאלות הבאות:

1. א. נסח והוכח את משפט רול. (20%)
ב. בדוק את תנאי משפט רול עבור הפוקציה הבאה:
$f(x)=\sqrt[5]{x^2-7x}$ בקטע $[0,7]$

2. חשב שניים מתוך שלושת הגבולות הבאים: (20%)

א:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^n \cdot n!$$

ב:
$$\lim_{x\to\infty}\left(6e^{-11x}+9\sin x+3e^{8x}\right)^{\frac{8}{4x}}$$

ג:
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x^4-7x^3}{7x^4-3x^3+2}\right)^{-8x}$$

3. בדוק רציפות/ אי- רציפות של הפונקציה הבאה (15%)
בנקודה $x=0$ וקבע את סוגה במקרה של אי רציפות.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10}{5-7^{\frac{\sin x}{x^2}}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

4. הוכח לפי הגדרת הגבול כי מתקיים : (10%)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n-9}{3n^2+8}=1$$

5. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ (25%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

א : תחום הגדרה
ב : נקודות חיתוך עם הצירים.
ג : זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.
ד : תחומי עליה וירידה.
ה : נקודות קיצון.
ו : נקודות פיתול , תחומי קמירות כלפי מעלה וקמירות כלפי מטה.
ז : אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.
ח : שרטט את גרף הפונקציה.

6. הוכח או הפרך (אפשר להפריך בדוגמא נגדית) (10%)

א. בנקודת פתול חיב להתקיים כי f'=0.

ב. תתכן אסימפטוטה אנכית אליה העקומה נדבקת רק מצד אחד.

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

גבולות בסיסיים $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0 : $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \left(x^a\right)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x;$$

$$\left(\arccos(x)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$\left(\arctan(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\left(\operatorname{arc}\cot(x)\right)' = -\frac{1}{1+x^2}, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$.(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$

$$\int \cos xdx = \sin x + C;$$

$$\int \sin xdx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V=\pi\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad \sin^2 x+\cos^2 x=1;$$

$$\tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad \tan x\cdot\cot x=1;$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\qquad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad 1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
:
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
:
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות

תשובה 1 סעיף ב.

$$f(x)=\sqrt[5]{x^2-7x},\ f'=\frac{2x-7}{5(\sqrt[5]{x^2-7x})^4}$$

f היא פונקציה אלמנטרית כהרכבה של שורש על פולינום, והרי שורש היא הפוכה של חזקה ולכן אלמנטרית. לכן היא רציפה בכל תחום הגדרתה, וכיון השורש הוא חמישי אין בעית הגדרה בכלל והפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה. הנגזרת גם היא אלמנטרית ולכן גם היא מוגדרת בתנאי שהמכנה שונה מ-0. המכנה מתאפס ב x=0,7 ולכן הפונציה גזירה בקטע הפתוח. בנוסף f(0)=f(7)=0 ולכן מתקיימים תנאי משפט רול, וגם המסקנה, כיון ש f'=0 רק בנקודה x=7/2.

תשובה 2 א

לפי משפט הסנדביץ

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{3}{n})^n\cdot n!$$

$$(\frac{3}{n})^n\cdot n!=\frac{3^n n!}{n^n},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}}=\frac{3(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n}=\frac{3}{(1+1/n)^n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(1+1/n)^n}=\frac{3}{e}>1\to Dalambert\to\lim_{n\to\infty}(\frac{3}{n})^n\cdot n!=\infty$$

תשובה 2 ב

:

$$\lim_{x\to\infty}(6e^{-11x}+9\sin x+3e^{8x})^{\frac{8}{4x}}=(0+||\le 9+\infty)^0=\infty^0=?$$

$$6e^{-11x}+9\sin x+3e^{8x}=e^{8x}(6^{-19x}+9\frac{\sin x}{e^{8x}}+3).\lim_{x\to\infty}6e^{-19x}+9\frac{\sin x}{e^{8x}}+3=(0+0+3)=3$$

$$\lim_{x\to\infty}(6e^{-11x}+9\sin x+3e^{8x})^{\frac{8}{4x}}=\lim_{x\to\infty}[e^{8x}(0+9\frac{\sin x}{e^{8x}}+3)]^{\frac{8}{4x}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}e^{\frac{8}{4x}8x}3^{\frac{8}{4x}}=e^{16}3^0=e^{16}.$$

תשובה 2 ג

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x^4-7x^3}{7x^4-3x^3+2}\right)^{-8x}=1^{\infty}=?$$

$$\left(\frac{7x^4-7x^3}{7x^4-3x^3+2}-1\right)(-8x)=\frac{(7x^4-7x^3)-(7x^4-3x^3+2)}{7x^4-3x^3+2}(-8x)=\frac{-4x^3-2}{7x^4-3x^3+2}(-8x)=$$

$$=\frac{32x^4+krechtzen}{7x^4-3x^3+2}.L=\lim_{x\to\infty}\frac{32x^4+krechtzen}{7x^4-3x^3+2}=\frac{32}{7}.\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x^4-7x^3}{7x^4-3x^3+2}\right)^{-8x}=e^{\frac{32}{7}}$$

תשובה 3

$$\lim_{x\to0-}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0-}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{x}=1\cdot\frac{1}{0-}=-\infty.\lim_{x\to0-}7^{\frac{\sin x}{x^2}}=7^{-\infty}=0.,\lim_{x\to0-}\frac{10}{5-7^{\frac{\sin x}{x^2}}}=\frac{10}{5-0}=2.$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{x}=1\cdot\frac{1}{0+}=\infty.\lim_{x\to0+}7^{\frac{\sin x}{x^2}}=7^{\infty}=\infty.,\lim_{x\to0}\frac{10}{5-7^{\frac{\sin x}{x^2}}}=\frac{10}{5-\infty}=0.$$

לכן ב x=0 יש נקודת קפיצה עבור f.

תשובה 4

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n-9}{3n^2+8}=1$$

$$\frac{3n^2+5n-9}{3n^2+8}-1=\frac{(3n^2+5n-9)-(3n^2+8)}{3n^2+8}=\frac{5n-17}{3n^2+8}.$$

$$(0\le 5n-17)\leftrightarrow(4\le n).(4\le n)\to\left[0\le\frac{5n-17}{3n^2+8}\le\frac{5n}{3n^2+8}\le\frac{5n}{3n^2}=\frac{3}{5n}\right].$$

$$(4\le n)\to 0\le\frac{3n^2+5n-9}{3n^2+8}-1\le\frac{5}{3n}<\varepsilon\to\frac{5}{3\varepsilon}<n$$

תשובה 5

א: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}:\mathbb{R}-\{\pm1\}\to\mathbb{R}$

ב: $x=0 \leftarrow x^3=0 \leftarrow y=\dfrac{x^3}{x^2-1}=0$. לכן $(0,0)$ נקודות חיתוך יחידה הצירים.

ג: זוגיות/אי-זוגיות ת״ה סימטרי, ובנוסף $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=\dfrac{-x^3}{x^2-1}=-f(x)$

. כלומר הפונקציה אי זוגיות.

ד : ה : ו

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}:\ f'(x)=\frac{3x^2\cdot(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2-1)^2}.$$

$$f''(x)=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-2(x^2-1)2x(x^4-3x^2)}{((x^2-1)^2)^2}=\frac{2x(x^2-1)[(x^2-1)(2x^2-3)-2(x^4-3x^2)]}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{2x(x^2-1)[2x^4-5x^2+3-2(x^4-3x^2)]}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2-1)(x^2+3)}{(x^2-1)^4}$$

ולכן

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
$\pm f'$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\pm f''$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$

לכן בתחום הראשון f עולה ובוכה, בשני יורדת ובוכה, בשלישי יורדת ומחייכת.
ברביעי יורדת ובוכה בחמישי יורדת ומחייכת ובשישי עולה ומחייכת.

לכן $(-\sqrt{3},\frac{-3\sqrt{3}}{2})$ מקסימום מקומי, $(0,0)$ **נקודת פתול**, לכן $(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2})$ מינימום מקומי

$$\lim_{x\to-1-}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{-1}{0+}=-\infty,\ \lim_{x\to-1+}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{-1}{0-}=\infty,\ \lim_{x\to1-}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{1}{0-}=-\infty,\ \lim_{x\to1+}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty$$

לכן $x=\pm1$ ישרי אסימפטוטה אנכית אל כל אחד מהם העקום נדבק פעמיים.
הפונקציה היא רציונלית ומספיק לבדוק את האסימפטוטה המשופעת ב-x=∞ בלבד, ואכן:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x^2-1)\cdot x}=1,\ f(x)-1x=\frac{x^3-x^3+x}{(x^2-1)}=\frac{x}{x^2-1}.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0.y=1x+0=x$$

כלומר y=x אסימפטוטה משופעת ב-±∞

תשובה 6

א. לא נכון ולהלן דוגמא נגדית. נגדיר f(x) על ידי $f(x)=x^3-3x\to f'=3x^2-3\to f''=6x$ אז אכן x=0 היא נקודת פתול כי היא מעבר מתחום קמירות לקעירות, אבל ערך f' באותה נקודה הוא -3.

ב. נכון ולהלן דוגמא נגדיר f(x) על ידי $f(x)=e^{\frac{1}{x}}:\mathbb{R}-\{0\}\to(0,\infty)$ ונחשב האם x=0 הוא ישר אסימפטוטה אנכית

$$\lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0-}} = e^{-\infty} = 0, \lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0+}} = e^{\infty} = \infty$$

ואכן העקום נדבק לישר רק מצד ימין.