המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>מבחן סוף בקורס אינפי א –סמסטר סתו התשע"ג מועד ב</u>

יום ד, כד אדר ה'תשע"ג 6-3-2013

- **המורה: גיורא דולה.**
- **משך המבחן: שעתיים וחצי**
- **הציון המירבי האפשרי הוא 100 נקודות.**
- **מותרים מחשבונים שאינם מדעיים.**
- **ענה על כל השאלות**

בהצלחה

1. א. נסח <u>והוכח</u> את המשפט שאומר כי כל פונקציה רציפה על קטע סגור חסומה מלרע. מותר לך להסתמך על כל טענה, בתנאי שתנסח אותה לחוד. (30%)

ב. הוכח כי לכל פולינום מהצורה: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$ יש לפחות שורש אחד.

2. חשב את שלושת הגבולות הבאים: (30%)

א: $\lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)!+7n!}{6n!-9(n+1)!}$

ב: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{\sin(-6x)}$

ג: $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{8x^3-6x^2+2}{8x^3-5x+9} \right)^{4+2x}$

3. בדוק רציפות/ אי- רציפות של הפונקציה הבאה בנקודה $x = 2$ (16%)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{4-e^{\frac{9}{(2-x)^2}}} & x \neq 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$

4. הוכח או הפרך (אפשר להפריך בדוגמא נגדית) (12%)

א. אם $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = 0$ אזי בהכרח $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

ב. הוכח כי למשוואה הבאה יש לפחות שני פתרונות ממשיים:

$$7^{-3x} + 3e^{5x} + 8x^6 + 7\sin(x) + 6x^2 - 10 = 0$$

5. הוכח כי אם f ו-g גזירות בנקודה a אז גם fg גזירה בנקודה a ומתקיים כי $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ (12%)

.

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),\, a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y=a^{x+y},(ab)^x=a^x b^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828\ldots$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)'=ax^{a-1}, \qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x, \qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x, \qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x);$$
$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$
$$(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx=C;$$
$$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C;$$
$$\int\cos xdx=\sin x+C;$$
$$\int\sin xdx=-\cos x+C;$$
$$\int e^x dx=e^x+C;$$
$$\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C;$$
$$\int x^a dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C, a\neq -1;$$
$$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C;$$
$$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C;$$
$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\arctan x+C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \qquad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$
$$\tan x \cdot \cot x = 1; \qquad \tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}; \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$
$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha)=\frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha)=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha)=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan(\frac{\alpha}{2})=\frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

:

$$\tan^2(\frac{\alpha}{2})=\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות

תשובות

תשובה ראשונה, **סעיף ב**

$$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d=x^3(a+bx^{-1}+cx^{-2}+dx^{-3}).\lim_{x\to\infty}p(x)=\lim_{x\to\infty}x^3(a+bx^{-1}+cx^{-2}+dx^{-3})=$$
$$=\infty^3(a+\frac{b}{\infty}+\frac{c}{\infty^2}+\frac{d}{\infty^3})=\infty(a+0+0+0)=\infty.\lim_{x\to-\infty}p(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3(a+bx^{-1}+cx^{-2}+dx^{-3})=$$
$$=(-\infty)^3(a+\frac{b}{-\infty}+\frac{c}{(-\infty)^2}+\frac{d}{(-\infty)^3})=-\infty(a+0+0+0)=-\infty.$$

לכן קים M גדול עבורו p(M) חיובי, וקים K קטן עבורו p(K) שלילי. כיון שכל פולינום הוא פונקציה רציפה בכל הממשיים, אז לפי תכונת ערכי הביניים של קושי, יש לפולינום זה פתרון בקטע [K,M]

תשובה שניה סעיף א

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5(n+1)!+7n!}{6n!-9(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5(n+1)!+7n!}{(n+1)!}}{\frac{6n!-9(n+1)!}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{7}{n+1}}{\frac{6}{n+1}-9}=\frac{5}{-9}$$

תשובה שניה סעיף ב

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{\sin(-6x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{5x}-1}{x}}{\frac{\sin(-6x)}{x}}=\frac{5}{-6}\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{5x}-1}{5x}}{\frac{\sin(-6x)}{-6x}}=\frac{5}{-6}\frac{\lim_{5x\to0}\frac{e^{5x}-1}{5x}}{\lim_{-6x\to0}\frac{\sin(-6x)}{-6x}}=\frac{5\cdot1}{-6\cdot1}=\frac{5}{-6}$$

תשובה שניה סעיף ג

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{8x^3-6x^2+2}{8x^3-5x+9})^{4+2x}=1^\infty,(\frac{8x^3-6x^2+2}{8x^3-5x+9}-1)(4+2x)=\frac{x^2-7}{8x^3-5x+9}(4+2x)=\frac{2x^3+4x^2-14x-28}{8x^3-5x+9}.$$
$$\lim_{x\to\infty}(\frac{8x^3-6x^2+2}{8x^3-5x+9}-1)(4+2x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+4x^2-14x-28}{8x^3-5x+9}=\frac{1}{4},\lim_{x\to\infty}(\frac{8x^3-6x^2+2}{8x^3-5x+9})^{4+2x}=e^{0.25}$$

תשובה 3

$$\lim_{x\to 2+}(2-x)^2=0+,\lim_{x\to 2+}\frac{9}{(2-x)^2}=\infty,\lim_{x\to 2+}e^{\frac{9}{(2-x)^2}}=e^{\infty}=\infty,\lim_{x\to 2+}4-e^{\frac{9}{(2-x)^2}}=-\infty,\lim_{x\to 2+}\frac{8}{4-e^{\frac{9}{(2-x)^2}}}=0,$$

$$\lim_{x\to 2-}(2-x)^2=0+,\lim_{x\to 2-}\frac{9}{(2-x)^2}=\infty,\lim_{x\to 2-}e^{\frac{9}{(2-x)^2}}=e^{\infty}=\infty,\lim_{x\to 2-}4-e^{\frac{9}{(2-x)^2}}=-\infty,\lim_{x\to 2-}\frac{8}{4-e^{\frac{9}{(2-x)^2}}}=0.$$

לכן ב x=2 יש אי רציפות סליקה.

תשובה 4

נשתמש בהגדרה ונקבל

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{2(x+h)}-e^{2x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{2x+2h}-e^{2x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{2x}e^{2h}-e^{2x}}{h}=e^{2x}\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-1}{h}=2e^{2x}\lim_{2h\to 0}\frac{e^{2h}-1}{2h}=2e^{2x}\cdot 1=2e^{2x}.$$

תשובה 5 סעיף א

דוגמא נגדית

$$a_n=\frac{1}{2},b_n=n,a_n^{\ b_n}=\frac{1}{2^n},\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

תשובה 5 סעיף ב

$$f(x)=7^{-3x}+3e^{5x}+8x^6+7\sin(x)+6x^2-10,\ f(0)=7^0+3e^0+8\cdot 0+7\cdot 0+6\cdot 0-10=4-10=-6<0.$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}e^{5x}(\frac{7^{-3x}}{e^{5x}}+3+\frac{8x^6}{e^{5x}}+\frac{7\sin(x)}{e^{5x}}+\frac{6x^2}{e^{5x}}-\frac{10}{e^{5x}})=\infty(0+3+0+0+0-0)=\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}7^{-3x}(1+\frac{3}{7^{-3x}}+\frac{8x^6}{7^{-3x}}+\frac{7\sin(x)}{7^{-3x}}+\frac{6x^2}{7^{-3x}}-\frac{10}{7^{-3x}})=\infty(1+0+0+0+0-0)=\infty.$$

לכן קיים M גדול עבורו $0<f(M)$ וקיים N שלילי עבורו $0<f(N)$. אז לפי תכונץ ערכי הבינים של קושי יש לפחות שרש אחד בקטע $[0,M]$ ושני בקטע $[N,0]$.