



מבחן סוף בקורס אינפי א – סמסטר סתו התשע"ו מועד ב

יום ד, כט אדר א ה'תשע"ו 9-3-2016

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה המתרגל שגיא לוי.

משך הבחינה: שעתיים וחצי

חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

ענה על כל השאלות הבאות:

1. (20%)

א. נסח והוכח את משפט ערך הביניים של קושי גובה 0 (זה שאינו כולל נגזרות).

ב. הוכח כי למשוואה $f(x) = e^{3x} + 5x - 6$ יש שורש אחד בדיוק.

2. חשב שניים מתוך שלושת הגבולות הבאים: (18%)

א. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

ב. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{\sin(2x-2)}}$

ג. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(2x^2 + x) - 2\ln(x)$

3. (9%) לאילו ערכים של a, b הפונקציה הבאה תהיה רציפה וגזירה על כל הממשיים.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & x \leq 1 \\ 2x & 1 < x \end{cases}$$

4. הוכח לפי הגדרת הגבול כי מתקיים: (10%)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2.5} = 1$$

5. חשב לפי הגדרת הנגזרת את הנגזרת של $\sqrt[3]{x^2}$: (9%)

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln\left(\frac{5x+5}{x+2}\right)$ (25%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

- א : תחום הגדרה וטווח
- ב : נקודות חיתוך עם הצירים.
- ג : זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.
- ד : תחומי עליה וירידה.
- ה : נקודות קיצון.
- ו : נקודות פיתול , תחומי קמירות כלפי מעלה וקמירות כלפי מטה.
- ז : אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.
- ח : שרטט את גרף הפונקציה.
- ט : תמונה מדויקת

7. הוכח או הפרך או תן דוגמא (אפשר להפריך בדוגמא נגדית) (10%)

א. נתונה פונקציה זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ובעלת נקודת קיצון מקומית

יחידה. אז נקודת הקיצון חיבת לקים ש $x=0$.

ב. תן דוגמא לפונקציה אשר בנקודה $x=1$ היא רציפה אך לא גזירה

ואשר מקיימת $f(2)=7$.

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) הוא $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ב. פירוק הטרינום $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, a^0 = 1,$$

$$(a^x)^y = a^{xy}, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו- $0 < a, a \neq 1$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x, \quad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828\dots$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$
 גבולות בסיסיים

5. הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\begin{aligned}
(\arcsin(x))' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (x^a)' &= ax^{a-1}, & (a^x)' &= \ln a \cdot a^x; \\
(\arcsin(x))' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\sin x)' &= \cos x, & (e^x)' &= e^x; \\
(\arccos(x))' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\cos x)' &= -\sin x, & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln a}; \\
(\arctan(x))' &= \frac{1}{1+x^2}, & (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}; \\
(\operatorname{arccot}(x))' &= -\frac{1}{1+x^2}, & (\ln x)' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

7. כללי גזירה

$$\begin{aligned}
(a \cdot f(x))' &= a \cdot f'(x); \\
(f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x); \\
(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x); \\
(f(x)g(x)h(x))' &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}; \\
(f(g(x)))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

8. אינטגרלים מיידיים

$$\begin{aligned}
\int 0 dx &= C; \dots \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C; \dots \int \cos x dx = \sin x + C; \\
\int \sin x dx &= -\cos x + C; \dots \int e^x dx = e^x + C; \dots \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C; \\
\int x^a dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1; \dots \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C; \dots \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C; \dots \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C
\end{aligned}$$

9. כללי אינטגרציה

$$\begin{aligned}
\int (f(x) \pm d(x)) dx &= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx; \\
\int af(x) dx &= a \int f(x) dx; \\
\int f(x) dx = F(x) + C &\Rightarrow \int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;
\end{aligned}$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

אינטגרציה בחלקים בנוסח אחר:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א. שטח: $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

11.

א. הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta). \quad :$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

פתרונות
תשובה 1 סעיף ב

$$f(x) = e^{3x} + 5x - 6$$

נשים לב כי זו פונקציה אלמנטרית כחבור חסור והרכבה של כאלה, ומוגדרת לכל ממשי בתור חבור של כאלה. לכן הפונקציה רציפה וגזירה בכל תחום הגדרתה ובנוסף מתקיים $f(0) < 0, f(1) > 0$, ולכן לפי משפט ערך הביניים של קושי יש לה שורש אחד לפחות בקטע $[0,1]$. כמו כן $f'(x) = 3e^{3x} + 5$ אשר מקבלת בטווח ערכים חיוביים בלבד ולכן f עולה ולכן חח"ע ולכן הפתרון יחיד.

תשובה 2 א

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \doteq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1/3)x^{-(2/3)}}{(1/2)x^{-(1/2)}} = \frac{2}{3}$$

תשובה 2 ב

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{\sin(2x-2)}} &= 1^{\frac{2}{0}} = 1^{\pm\infty} = \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2(x-1)}{(x-1)\sin(2x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{\frac{1}{x-1}})^{\frac{2(x-1)}{\sin(2x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{\frac{1}{x-1}})^1 = \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1}}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{0}{0} \doteq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = 1, \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{\sin(2x-2)}} = e^1 = e \end{aligned}$$

פתרון נוסף:

$$\begin{aligned} x = 1 + x - 1 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{x-1}}, x^{\frac{2}{\sin(2x-2)}} &= \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x-1}}\right)^{\frac{2}{\sin(2x-2)}} = \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x-1}}\right)^{\frac{x-1}{x-1} \frac{2}{\sin(2x-2)}} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1} \frac{2(x-1)}{\sin(2x-2)}} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}}\right]^{\frac{2(x-1)}{\sin(2x-2)}} \end{aligned}$$

ולכן

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{\sin(2x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}}\right]^{\frac{2(x-1)}{\sin(2x-2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{\sin(2x-2)}}$$

$$u = 2x - 2, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{\sin(2x-2)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2u}{\sin(2u)} = 1, \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{\sin(2x-2)}} = e^1$$

תשובה 2 ג

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(2x^2 + x) - 2\ln(x) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{2x^2 + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+1}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{2} = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(2x^2 + x) - 2\ln(x) = \ln 2$$

תשובה 3

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & x \leq 1 \\ 2x & 1 < x \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x < 1 \\ 2 & 1 < x \end{cases}$$

$$\text{ולכן כדי } \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2ax + b = 2a + b, \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 2$$

שהפונקציה תהיה רציפה וגזירה מתקיים כי

$$a + b + 1 = 2, 2a + b = 2 \Rightarrow a = 1, b = 0$$

תשובה 4

$$\text{ולכן } \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2.5} < 1^{2.5} = 1$$

$$0 < 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2.5} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2.5} \Leftrightarrow (1 - \varepsilon)^{2/5} < \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < 1 - (1 - \varepsilon)^{2/5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - (1 - \varepsilon)^{2/5}} < n + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1 - (1 - \varepsilon)^{2/5}} - 1 < n$$

תשובה 5

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt[3]{(x+h)^2} - \sqrt[3]{x^2}}{h} = \frac{(\sqrt[3]{(x+h)^2} - \sqrt[3]{x^2}) (\sqrt[3]{(x+h)^2}^2 + \sqrt[3]{(x+h)^2} \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{x^2})}{h (\sqrt[3]{(x+h)^2}^2 + \sqrt[3]{(x+h)^2} \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{x^2})} =$$

$$= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h (\sqrt[3]{(x+h)^2}^2 + \sqrt[3]{(x+h)^2} \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{x^2})} = \frac{2xh + h^2}{h (\sqrt[3]{(x+h)^2}^2 + \sqrt[3]{(x+h)^2} \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{x^2})} =$$

$$= \frac{2x+h}{\sqrt[3]{(x+h)^2}^2 + \sqrt[3]{(x+h)^2} \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{x^2}}$$

$$(\sqrt[3]{x^2})' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(x+h)^2} - \sqrt[3]{x^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x+h}{\sqrt[3]{(x+h)^2}^2 + \sqrt[3]{(x+h)^2} \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{x^2}} =$$

$$\frac{2x}{\sqrt[3]{x^2}^2 + \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{x^2}} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

ולכן

תשובה 6 א.

ב: הפונקציה $f(x) = \ln\left(\frac{5x+5}{x+2}\right)$ מוגדרת כאשר המשתנה של \ln הוא חיובי,

$$\left(\frac{5x+5}{x+2} > 0\right) \Leftrightarrow 5(x+1)(x+2) > 0 \Leftrightarrow D = (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$$

הוא כל הממשיים. אי אפשר לדבר על זוגיות כי ת"ה איננו סימטרי. חתוך עם

$$\text{הצירים: } f(0) = \ln\left(\frac{5 \cdot 0 + 5}{0 + 2}\right) = \ln\left(\frac{5}{2}\right) = \ln(5) - \ln(2)$$

$$\text{לכן } f(x) = \ln\left(\frac{5x+5}{x+2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{5x+5}{x+2} = 1 \Rightarrow 5x+5 = x+2 \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -3/4$$

נקודות חיתוך עם הצירים: $(-3/4, 0), (0, \ln(5/2))$.

ד: ה: ו

$$f(x) = \ln\left(\frac{5x+5}{x+2}\right) = \ln(5x+5) - \ln(x+2) = \ln(5(x+1)) - \ln(x+2) = \ln(5) + \ln(x+1) - \ln(x+2),$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{(x+2) - (x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

$$f'' = -\frac{1 \cdot (x+2) + 1 \cdot (x+1)}{(x+1)^2(x+2)^2} = \frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2}$$

$$\text{לכן } f' > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x+2)} > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x \in D \text{ כלומר } f \text{ עולה בכך תחום}$$

$$\text{ההגדרה. בנוסף } f'' > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2} > 0 \Leftrightarrow 2x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3/2 \text{ ונקודת הפתול}$$

מחוץ לתחום ההגדרה, ולכן f קעורה בזרוע השמאלית שלה וקמורה בזרוע הימנית שלה.

ולכן הנקודות בהן חל שנוי הן $x = -2, x = -1, x = -3/2$, מהן $-3/2$ איננה בתחום ההגדרה. בשני הקרניים f עולה, בקרן השמאלית f בוכה ובימנית צוחקת. אין נקודות קיצון ואין נקודות פתול. כעת נבדוק אסימפטוטות. כאשר x שואף לפלוס מינוס אינסוף נקבל

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(5x+5) - \ln(x+2)}{x}. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5/(5x+5) - 1/(x+2)}{1} = \frac{0-0}{1} = 0 = a$$

$$\text{נציב לחשב את } b \text{ ונקבל } b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 0x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{5x+5}{x+2}\right) = \ln(5)$$

אסימפטוטה משופעת היא הקו האפקי $y = \ln(5)$. נחשב שני גבולות חד צדדיים כדי

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln\left(\frac{5x+5}{x+2}\right) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \ln\left(\frac{-5}{0^-}\right) = \ln(\infty) = \infty,$$

לומר אודות אסימפטוטות אנכיות.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln\left(\frac{5x+5}{x+2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{0^+}{1}\right) = \ln(0^+) = -\infty$$

וכעת $f(-\infty, -2) = (\ln(5), \infty), f(1, \infty) = (-\infty, \ln(5))$ ולכן התמונה המדויקת

היא $\mathbb{R} - \{\ln(5)\}$.

תשובה 7

- א. אם $x=a>0$ היא נקודת קיצון מקומית, אז לפי הזוגיות גם $x=-a<0$ היא נקודת קיצון מקומית וזה סותר את יחידות נקודת הקיצון. באופן דומה עבור a שלילית, ולכן נקודת הקיצון צריכה להיות ב-0.
- ב. נביט בנקודות $(1,6), (2,7)$. משואת הישר העובר דרכן היא $y=x+5$. נביט בנקודות $(1,6), (0,7)$. משואת הישר העובר דרכן היא $y=-x+7$. נגדיר פונקציה $f(x) = \begin{cases} 7-x & x < 1 \\ x+5 & 1 \leq x \end{cases}$ וזוהי אחת הפונקציות הדרושות. היא שווה ל $6+|x-1|$