המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף בקורס אינפי א –סמסטר סתו התשע"ז

מועד ב יום ד, ל ניסן ה'תשע"ז 26-4-2017

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה המתרגלים ד"ר אורי פנקס משה פדרבוש.

משך הבחינה: <u>שעתיים וחצי</u>

חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. (20%)

א. נסח <u>והוכח</u> את משפט ROLLE

ב. האם הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ בקטע $[-1,1]$ מקיימת את תנאי ומסקנת משפט רול?

2. חשב שניים מתוך שלושת הגבולות הבאים: (18%)

א. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{3}{1-\sqrt[3]{x}}$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ רמז $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

ג. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{[(\cot x)^2]}$

3. (9%) מצא נקודות אי רציפות לפונקציה הבאה וסווג אותן

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{|x-5|}} & x\neq 5 \\ 0 & x=5 \end{cases}$$

4. הוכח לפי הגדרת הגבול כי מתקיים : (9%)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2+5n+2}{8n^2-9}=\frac{7}{8}$$

5. תן דוגמא לפונקציה שתחום ההגדרה שלה מתחלק לקטעי עליה ובכל אופן היא איננה פונקציה עולה. (9%)

6. הוכח לפי הגדרת הנגזרת כי מתקיים $(\ln x)'=\frac{1}{x}$: (10%)

7. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2e^{-x}$ (25%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

א : תחום הגדרה וטווח
ב : נקודות חיתוך עם הצירים.
ג : זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.
ד : תחומי עליה וירידה.
ה : נקודות קיצון.
ו : נקודות פיתול , תחומי קמירות כלפי מעלה וקמירות כלפי מטה.
ז : אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.
ח : שרטט את גרף הפונקציה.
ט : תמונה מדויקת

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x,e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

גבולות בסיסיים $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \left(x^a\right)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x;$$

$$\left(\arccos(x)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$\left(\arctan(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\left(\operatorname{arc}\cot(x)\right)' = -\frac{1}{1+x^2}, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$.\ (f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;........................\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;................\int \cos xdx = \sin x + C;$$

$$\int \sin xdx = -\cos x + C;........\int e^x dx = e^x + C;..................\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;..\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;....\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;.....\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$
:
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
:
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

:

פתרונות

תשובה 1 סעיף ב

$f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ היא יסודית ומוגדרת על הקטע $[-1,1]$ ולכן רציפה שם.

בנוסף $f(\pm 1)=\sqrt[3]{(\pm 1)^2}=\sqrt[3]{1}=1$ לפי משפט רול , אבל $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ איננה מוגדרת ב-0 ולכן לא מתקיימות ההנחות של משפט רול וגם לא המסקנות ובאמת אין אף נקודה (על הישר הממשי) ששם $f'(x)$ מתאפסת.

תשובה 2 סעיף א

א.

$$\frac{2}{1-\sqrt{x}}-\frac{3}{1-\sqrt[3]{x}}=\frac{2(1+\sqrt{x})-3(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1-x}=\frac{-1-3(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})+2\sqrt{x}}{1-x},\lim_{x\to 1}\frac{2}{1-\sqrt{x}}-\frac{3}{1-\sqrt[3]{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}-3(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})-1}{1-x}=\frac{-5}{0}=\pm\infty$$

תשובה 2 סעיף ב

ב.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=?$$

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}},,\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\frac{n!}{n^n}=\frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{1}{(1+1/n)^n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}},\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^n}=\frac{1}{e}$$

תשובה 2 סעיף ג

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{[(\cot x)^2]} = ?, (\cos x)^{[(\cot x)^2]} = e^{\ln((\cos x)^{[(\cot x)^2]})} = e^{(\cot x)^2 \ln(\cos x)}, (\cot x)^2 \ln(\cos x) = \frac{\ln(\cos(x))}{1/(\cot x)^2} =$$

$$= \frac{\ln(\cos(x))}{(\tan x)^2} = \frac{(\cos x)^2 \ln(\cos(x))}{(\sin x)^2}, \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^2 \ln(\cos(x))}{(\sin x)^2} = \lim_{x\to 0}(\cos x)^2 \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{(\sin x)^2} =$$

$$\doteq 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin x/\cos x}{2\sin x\cos x} = \frac{-1}{2}, \lim_{x\to 0}(\cos x)^{[(\cot x)^2]} = e^{-0.5}$$

תשובה 3

.

ולכן $\lim_{x\to 0+}\frac{-1}{|x-5|} = \frac{-1}{0+} = -\infty, \lim_{x\to 0-}\frac{-1}{|x-5|} = \frac{-1}{0+} = -\infty, \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{|x-5|}} = e^{-\infty} = 0.$

הפונקציה רציפה גם ב $x=0$ וכמובן בכל נקודה אחרת כיון שהיא יסודית ומוגדרת.

תשובה 4

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2+5n+2}{8n^2-9} = \frac{7}{8}, \frac{7n^2+5n+2}{8n^2-9} - \frac{7}{8} = \frac{56n^2+40n+16}{8(8n^2-9)} - \frac{56n^2-63}{8(8n^2-9)} = \frac{40n+79}{8(8n^2-9)},$$

ולכן $|\frac{7n^2+5n+2}{8n^2-9} - \frac{7}{8}| = |\frac{40n+79}{8(8n^2-9)}|.(n>1) \to |\frac{7n^2+5n+2}{8n^2-9} - \frac{7}{8}| = \frac{40n+79}{8(8n^2-9)}.$

$$(7n^2 < 8n^2-9) \leftrightarrow (9<n^2) \leftarrow (3<n).(40n+79<41n) \leftrightarrow (79<n)$$

עבור n גדול או שוה ל-80 נקבל

$$|\frac{7n^2+5n+2}{8n^2-9} - \frac{7}{8}| = \frac{40n+79}{8(8n^2-9)} < \frac{41n}{8(7n^2)} = \frac{41}{56n} < \varepsilon \leftrightarrow \frac{41}{56\varepsilon} < n.$$

$$(n > \max\{\frac{41}{56\varepsilon}, 79\}) \to |\frac{7n^2+5n+2}{8n^2-9} - \frac{7}{8}| < \varepsilon$$

תשובה 5

הפונקציה $p(x)=\frac{-1}{x}:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{0\}$ עולה בקרן $(-\infty,0)$ ובקרן $(0,\infty)$ אבל יש לה נפילה בסביבת ה-0 ואכן $x_1=-1<x_2=1$ גורר $f(x_1)=1>f(x_2)=-1$

תשובה 6

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h}=\lim_{h\to 0}\ln(\frac{x+h}{x})^{\frac{1}{h}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}\ln[(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}]^{\frac{1}{x}}=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$$

תשובה 7

א. : הפונקציה $f(x)=x^2e^{-x}$ לכל x, התוצאה היא מכפלת אי שליליים ולכן הטוח הוא הקרן $[0,\infty)$ ולכן $f(x):\mathbb{R}\to[0,\infty)$ חתוך יחיד עם הצירים בראשית $(0,0)$. ת״ה הוא סימטרי וניתן לדון בזוגיות, ומתקיים $f(-x)=(-x)^2e^x=x^2e^x\neq f(x),\neq -f(x)$ ולכן מבחינת זוגיות זוהי פונקציה כללית. כעת נחשב נגזרות :

ד : ה : ו $f(x)=x^2e^{-x}-4,\ f'(x)=(2x-x^2)e^{-x},\ f''=(x^2-4x+2)e^{-x}$

ולכן הנקודות בהן חל שנוי הן $x=0,2,2\pm\sqrt{2}$. בקטע $(-\infty,0)$ f יורדת ומחייכת, בקטע $(0,2-\sqrt{2})$ f עולה ומחייכת, בקטע $(2-\sqrt{2},2)$ f עולה ובוכה, בקטע $(2,2+\sqrt{2})$ f יורדת ובוכה, ובקטע $(2+\sqrt{2},\infty)$ f יורדת ומחייכת. ב-0 יש מינימום מקומי וב-2 מקסימום מקומי והנקודות $x=2\pm\sqrt{2}$ הן נקודות פתול.

. כעת נבדוק אסימפטוטות. f מוגדרת על כל הממשיים ולכן אין לה אסימפטוטה אנכית ובנוסף נחשב עבור אסימפטוטות משופעות : כאשר x שואף לפלוס ולמינוס אינסוף נקבל

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2e^{-x}}{x}=xe^{-x}.\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\doteq\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\doteq\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0=a,b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-0x)=\lim_{x\to\infty}f(x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{e^x})\doteq\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}\doteq\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0,y=0x+0=0,\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\doteq\lim_{x\to-\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to\infty}(-x)e^x=(-\infty)\infty=-\infty$$

לכן יש רק אסימפטוטה משופעת אחת, y=0 כאשר x שואף לאינסוף.