

## המכללה האקדמית נתניה

מבחן באינפי א' מועד ג'

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה  
תאריך הבחינה:  
משך הבחינה: שעתיים וחצי  
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).  
ענה על כל השאלות הבאות:

1 א: נסח והוכח את משפט ערך הממוצע של לגרנז'. (30%)

ב: בעזרת המשפט בחלק א', הוכח שלכל  $0 < x$  מתקיים  $\sin x \leq x$   
רמז: הסתכל על  $f(x) = \sin x$  בקטע  $[0, x]$

2. חשב שניים משלושת הגבולות הבאים: (20%)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{16n^{16} + 3n^9} - 5 - \sqrt{n^8 - 12n^7 + 19}}{4n^4 + 5n} \quad \text{א:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{2x} + 1)^{\frac{1}{x}} \quad \text{ב:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5 - 4x^3 + 2x}{2x - 7 - 4x^3} \right)^{2x^2 + 4x^3 - 3} \quad \text{ג:}$$

3. על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות "נכון" או "לא נכון"  
ולנמק נמוק קצר. הנמוק הקצר יכול להיות דוגמא נגדית. את  
התשובה יש לכתוב בשאלון. (21%)

$$\text{א. הפונקציה } f(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ רציפה ב } x = 0.$$

נכון            לא נכון  
נימוק קצר

ב. הפונקציה:  $f(x) = e^{(2x^2-3x+7)^3} - e^{(2x^2+3x+7)^3}$  זוגית.

נכון            לא נכון

נימוק קצר

ג. נתון:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  וכן  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{a_n})^{b_n} = e$ , אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$

נכון            לא נכון

נימוק קצר

(30%)

4. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-1} + 1$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א: תחום הגדרה

ב: נקודות חיתוך עם הצירים.

ג: זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.

ד: תחומי עליה וירידה ונקודות קריטיות.

ה: נקודות קיצון.

ו: נקודות פיתול, תחומי קמירות וקעירות.

ז: אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.

ח: שרטט את גרף הפונקציה.

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

## 2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) הוא  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

ב. פירוק הטרינום  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

## 3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, a^0 = 1,$$

$$(a^x)^y = a^{xy}, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

## 4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log:  $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה:  $\log_a x$  מוגדר רק כאשר  $x > 0$  ו-  $0 < a, a \neq 1$ .

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x, \quad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828\dots$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5. הגדרת נגזרת הפונקציה  $f$  בנקודה  $x_0$ :  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

## 6. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (e^x)' = e^x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

## 7. כללי גזירה

$$\begin{aligned}
(a \cdot f(x))' &= a \cdot f'(x); \\
(f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x); \\
(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x); \\
(f(x)g(x)h(x))' &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}; \\
(f(g(x)))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

## 8. אינטגרלים מיידים

$$\begin{aligned}
\int 0 dx &= C; \\
\int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C; \\
\int \cos x dx &= \sin x + C; \\
\int \sin x dx &= -\cos x + C; \\
\int e^x dx &= e^x + C; \\
\int a^x dx &= \frac{1}{\ln a} a^x + C; \\
\int x^a dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1; \\
\int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C; \\
\int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C; \\
\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C
\end{aligned}$$

## 9. כללי אינטגרציה.

$$\begin{aligned}
\int (f(x) \pm d(x)) dx &= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx; \\
\int af(x) dx &= a \int f(x) dx; \\
\int f(x) dx = F(x) + C &\Rightarrow \int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;
\end{aligned}$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

אינטגרציה בחלקים בנוסח אחר:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א. שטח :  $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות:  $S = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\varphi) d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x:  $V = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y:  $V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו:  $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

11.

א. הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

$\pi$  רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta). \quad :$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

**ד. סכומים והפרשים:**

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

**ה. מכפלות:**

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

**תשובות**

ב-1 נפעיל את משפט ערך הביניים של לגרנג'י עבור הפונקציה  $f(x) = \sin(x)$

בקטע  $[0, a]$  . אז מתקיים  $\frac{\sin(a) - \sin(0)}{a - 0} = \cos(c)$  עבור  $c$  המקיים

$0 < c < a$  . הפונקציה  $\cos(x)$  חסומה על ידי 1, ונקבל

$\frac{\sin(a)}{a} = \frac{\sin(a) - \sin(0)}{a - 0} = \cos(c) \leq 1$  . נכפול בבטוי החיובי  $a$  ונקבל  $\sin(a) \leq la = a$  כדרוש.

: א-2

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{16n^{16} + 3n^9 - 5} - \sqrt{n^8 - 12n^7 + 19}}{4n^4 + 5n} &= ?, \sqrt[4]{16n^{16} + 3n^9 - 5} = \\ &= \sqrt[4]{n^{16}(16 + 3n^{-7} - 5n^{-12})} = n^4 \sqrt[4]{16 + 3n^{-7} - 5n^{-12}}, \sqrt{n^8 - 12n^7 + 19} = \\ &= \sqrt{n^8(1 - 12n^{-1} + 19n^{-8})} = n^4 \sqrt{1 - 12n^{-1} + 19n^{-8}}, \frac{\sqrt[4]{16n^{16} + 3n^9 - 5} - \sqrt{n^8 - 12n^7 + 19}}{4n^4 + 5n} = \\ &= \frac{n^4 \sqrt[4]{16 + 3n^{-7} - 5n^{-12}} - n^4 \sqrt{1 - 12n^{-1} + 19n^{-8}}}{4n^4 + 5n} = \frac{n^4 (\sqrt[4]{16 + 3n^{-7} - 5n^{-12}} - \sqrt{1 - 12n^{-1} + 19n^{-8}})}{4n^4 + 5n} = \\ &= \frac{\sqrt[4]{16 + 3n^{-7} - 5n^{-12}} - \sqrt{1 - 12n^{-1} + 19n^{-8}}}{4 + 5n^{-3}}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{16n^{16} + 3n^9 - 5} - \sqrt{n^8 - 12n^7 + 19}}{4n^4 + 5n} = \frac{\sqrt[4]{16} - \sqrt{1}}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

: ב-2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{2x} + 1)^{\frac{1}{x}} &= \infty^0 = ?, e^{\ln((xe^{2x} + 1)^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{\ln(xe^{2x} + 1)}{x}}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(xe^{2x} + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1(e^{2x} + 2xe^{2x})}{xe^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} + 2xe^{2x}}{xe^{2x} + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} + 2xe^{2x}}{xe^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + 2}{1 + \frac{1}{xe^{2x}}} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{2x} + 1)^{\frac{1}{x}} = e^2. \end{aligned}$$

: ג-2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5 - 4x^3 + 2x}{2x - 7 - 4x^3} \right)^{2x^2 + 4x^3 - 3} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5 - 4x^3 + 2x}{2x - 7 - 4x^3} \right) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty, (f(x) - 1)g(x) = \\ &= \left( \frac{5 - 4x^3 + 2x}{2x - 7 - 4x^3} - 1 \right) (2x^2 + 4x^3 - 3) = \frac{5 - 4x^3 + 2x - (2x - 7 - 4x^3)}{2x - 7 - 4x^3} (2x^2 + 4x^3 - 3) = \frac{12(2x^2 + 4x^3 - 3)}{2x - 7 - 4x^3}. \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1)g(x) &= -12, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5 - 4x^3 + 2x}{2x - 7 - 4x^3} \right)^{2x^2 + 4x^3 - 3} = e^{-12}. \end{aligned}$$

4. על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות "נכון" או "לא נכון"  
 ולנמק נמוק קצר. הנמוק הקצר יכול להיות דוגמא נגדית. את  
 התשובה יש לכתוב בשאלון. (21%)

א. הפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  רציפה ב  $x = 0$ .

נכון נימוק קצר

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}, u = \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} u = \pm\infty, \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\sin(u)}{u}, -1 \leq \sin(u) \leq 1.$$

$$(0 < u) \rightarrow \left(\frac{-1}{u} \leq \frac{\sin(u)}{u} \leq \frac{1}{u}\right) \rightarrow \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sin(u)}{u} = 0. (u < 0) \rightarrow \left(\frac{1}{u} \leq \frac{\sin(u)}{u} \leq \frac{-1}{u}\right) \rightarrow \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\sin(u)}{u} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

נמוק יותר קצר.  $x$  שואפת ל-0 ו חסומה, ומכפלת חסומה באפסה  
 היא פונקציה אפסה.

לכן הגבול הדו צדדי שווה לערך הפונקציה ולכן היא רציפה.

ב. הפונקציה:  $f(x) = e^{(2x^2-3x+7)^3} - e^{(2x^2+3x+7)^3}$  זוגית.

לא נכון

נימוק קצר הפונקציה מוגדרת לכל  $x$  ולכן יש לה תייה סימטרי.  
 ובנוסף

$$f(-x) = e^{(2(-x)^2-3(-x)+7)^3} - e^{(2(-x)^2+3(-x)+7)^3} = e^{(2x^2+3x+7)^3} - e^{(2x^2-3x+7)^3} = -f(x)$$

כלומר היא פונקציה אי זוגית.

ג. נתון:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  וכן  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{b_n} = e$ , אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$ .

נכון נמוק קצר

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{\frac{b_n a_n}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right]^{\frac{b_n}{a_n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}} = e^1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1.$$



(30%)

4. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-1} + 1$

- חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :
- א: תחום הגדרה
  - ב: נקודות חיתוך עם הצירים.
  - ג: זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.
  - ד: תחומי עליה וירידה ונקודות קריטיות.
  - ה: נקודות קיצון.
  - ו: נקודות פיתול, תחומי קמירות וקעירות.
  - ז: אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.
  - ח: שרטט את גרף הפונקציה.

בהצלחה!!!

תשובה:

א. ת"ה  $\mathbb{R} - \{1\}$ . ב.  $y = 0 \rightarrow (x-2)^2 + (x-1) = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 3 = 0 \rightarrow \Delta < 0$ .  
וכמו כן  $x = 0 \rightarrow y = -3$  לכן נקודת החתוך היא  $(0, -3)$ . ג. ת"ה איננו סימטרי ולכן זו פונקציה כללית. ד, ה, ו.

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-1} + 1, f'(x) = \frac{2(x-1)(x-2) - (x-2)^2}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)[2x-2-x+2]}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2},$$
$$f''(x) = \frac{2(x-1)(x-1)^2 - 2(x-1)x(x-2)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)[(x-1)^2 - x(x-2)]}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

נקודות קריטיות 0, 1, 2. נציגים -1, 0.5, 1.5, 3. נקבל את טבלת סימני הנגזרות.

|               | $(-\infty, 0)$ | $(0, 1)$       | $(1, 2)$         | $(2, \infty)$   |
|---------------|----------------|----------------|------------------|-----------------|
| סימן של $y'$  | +              | -              | -                | +               |
| סימן של $y''$ | -              | -              | +                | +               |
| התנהגות $y$   | עולה<br>ובוכה  | יורדת<br>ובוכה | יורדת<br>ומחייכת | עולה<br>ומחייכת |

ולכן נקודת מקסימום מקומית,  $(2, 1)$  נקודת מינימום מקומית. אסימפטוטות אנכיות רק אפשריות עבור  $x=1$ .

$$\text{מתקיים כי } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-2)^2}{x-1} + 1 = \frac{1}{0^-} + 1 = -\infty$$

$$\text{ולכן אכן } x=1 \text{ ישר אסימפטוטה אנכית } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-2)^2}{x-1} + 1 = \frac{1}{0^+} + 1 = \infty$$

אליו העקום נדבק משני הצדדים. עבור אסימפטוטה משופעת  $\pm\infty$ , נקבל

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x-2)^2}{x-1} + 1}{x} = 1, f(x) - ax = \frac{(x-2)^2}{x-1} + 1 - x = \frac{(x-2)^2 + (x-1) - x(x-1)}{x-1} = \frac{-2x-1}{x-1},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x-1}{x-1} = -2, y = 1x - 2 = x - 2$$

כלומר קבלנו ישר אסימפטוטה משופעת ב  $\pm\infty$ .