המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

**<u>מבחן סוף בקורס אינפי א –סמסטר סתו התשע"ו מבחן דוגמא 1</u>**

**יום ד,** כט אדר א ה'תשע"ו 9-3-2016

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה   המתרגל שגיא לוי.

**משך הבחינה: <u>שעתיים וחצי</u>**

חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. (20%)

א. נסח <u>והוכח</u> את משפט ערך הבינים של קושי בגובה 0. (המשפט שאין בו נגזרות).

ב. הוכח כי למשוואה $f(x)=x^6+x^4+x^2-9$ יש בדיוק שני שרשים.

2. חשב שניים מתוך שלושת הגבולות הבאים: (18%)

א. $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{1-\sqrt[4]{x}}\right)$

ב. $\lim_{x\to1}(\sqrt{x})^{\frac{1}{x-1}}$

ג. $\lim_{x\to0}\frac{\tan(x)-x}{x-\sin(x)}$

3. (9%) לאילו ערכים של a,b הפונקציה הבאה תהיה רציפה וגזירה על כל הממשיים.

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+5 & x\le 2\\ ax+b & 2<x\end{cases}$$

4. הוכח לפי הגדרת הגבול כי מתקיים: (10%)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{5/3}=1$$

5. חשב לפי ההגדרה את הנגזרת של $\sqrt[4]{x^3}$ : (9%)

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x^2}\right)$ (25%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

א : תחום הגדרה וטווח
ב : נקודות חיתוך עם הצירים.
ג : זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.
ד : תחומי עליה וירידה.
ה : נקודות קיצון.
ו : נקודות פיתול , תחומי קמירות כלפי מעלה וקמירות כלפי מטה.
ז : אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.
ח : שרטט את גרף הפונקציה.
ט : תמונה מדויקת

7. הוכח או הפרך או תן דוגמא (אפשר להפריך בדוגמא נגדית) (10%)
   א. נתונות פונקציה איזוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו פונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
   אז $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא פונקציה זוגית.
   ב. תן דוגמא לפונקציה איזוגית עבורה x=0 היא נקודת אי רציפות..

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

גבולות בסיסיים $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה $f$ בנקודה $x_0$: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \left(x^a\right)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x;$$

$$\left(\arccos(x)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$\left(\arctan(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\left(\operatorname{arc}\cot(x)\right)' = -\frac{1}{1+x^2}, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

## 7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

.$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

## 8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;\ldots\ldots\ldots\ldots\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;\ldots\ldots\ldots\int \cos xdx = \sin x + C;$$

$$\int \sin xdx = -\cos x + C;\ldots\ldots\int e^x dx = e^x + C;\ldots\ldots\ldots\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;..\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;\ldots\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;\ldots\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

## 9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

### אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:
$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:
$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

## 10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

## .11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

$\pi$ רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$
$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
:
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
:
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות

תשובה 1 סעיף ב

$f(x)=x^6+x^4+x^2-9$

נשים לב כי זו פונקציה אלמנטרית כחבור חסור והרכבה של כאלה, ומוגדרת לכל ממשי בתור חבור של כאלה. לכן הפונקציה רציפה וגזירה בכל תחום הגדרתה ובנוסף מתקיים $f(0)<0, f(2)>0$ , ולכן לפי משפט ערך הביניים של קושי יש לה שורש אחד לפחות בקטע $[0,1]$. כמו כן $f'(x)=6e^5+4x^3+2x$ אשר מקבלת עבור x-ים חיוביים ערכים חיוביים בלבד ולכן f עולה ולכן חח״ע ולכן הפתרון יחיד עבור x חיובי. כיון שהפונקציה היא פונקציה זוגית אז אם x פתון חיובי יחיד נובע כי x–פתרון שלילי יחיד.

תשובה 2 א

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{1-\sqrt[4]{x}}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}\,\frac{1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}{1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}-\frac{1}{1-\sqrt[4]{x}}\,\frac{1+\sqrt[4]{x}+(\sqrt[4]{x})^2+(\sqrt[4]{x})^3}{1+\sqrt[4]{x}+(\sqrt[4]{x})^2+(\sqrt[4]{x})^3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}{1-x}-\frac{1+\sqrt[4]{x}+(\sqrt[4]{x})^2+(\sqrt[4]{x})^3}{1-x}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2-(\sqrt[4]{x}+(\sqrt[4]{x})^2+(\sqrt[4]{x})^3)}{1-x}\right)=$$

$$=\frac{-1}{0}=\pm\infty$$

תשובה 2 ב

$$\lim_{x\to1}(\sqrt{x})^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1}(x^{1/2})^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{2(x-1)}}=\lim_{x\to1}(1+x-1)^{\frac{1}{2(x-1)}}=\lim_{x\to1}\left(1+\frac{1}{1/(x-1)}\right)^{\frac{1}{2(x-1)}}=$$

$$\lim_{x\to1}\left[\left(1+\frac{1}{1/(x-1)}\right)^{\frac{1}{(x-1)}}\right]^{1/2}=e^{1/2}$$

:

תשובה 2 ג

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(x)-x}{x-\sin(x)}=\frac{0-0}{0-0}=\frac{0}{0}\doteq\lim_{x\to0}\frac{1/\cos^2(x)-1}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)(1-\cos(x))}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\cos(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1+1}{1}=2$$

תשובה 3

.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+5 & x\le 2 \\ ax+b & 2<x \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & x\le 2 \\ a & 2<x \end{cases}$$

ולכן כדי $\lim_{x\to 2-} ax^2+bx+5=4a+2b+5, \lim_{x\to 2+} 2ax+b=4a+b$

$$\lim_{x\to 2-} 2ax+b=4a+b, \lim_{x\to 2+} a=a$$

שהפונקציה תהיה רציפה וגזירה מתקיים כי

$$4a+2b+5=2a+b, 4a+b=a \Rightarrow 2a+b+5=0, 3a+b=0 \Rightarrow a=5, b=-15$$

תשובה 4

ולכן $\frac{n}{n+1}<1\to(\frac{n}{n+1})^{5/3}<1^{5/3}=1$

$$0<1-(\frac{n}{n+1})^{5/3}<\varepsilon \Leftrightarrow 1-\varepsilon<(\frac{n}{n+1})^{5/3} \Leftrightarrow (1-\varepsilon)^{3/5}<\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}<1-(1-\varepsilon)^{3/5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-(1-\varepsilon)^{3/5}}<n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-(1-\varepsilon)^{3/5}}-1<n$$

תשובה 5

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt[4]{(x+h)^3}-\sqrt[4]{x^3}}{h}\frac{(\sqrt[4]{(x+h)^3})^3+(\sqrt[4]{(x+h)^3})^2\sqrt[4]{x^3}+(\sqrt[4]{(x+h)^3})(\sqrt[4]{x^3})^2+(\sqrt[4]{x^3})^3}{(\sqrt[4]{(x+h)^3})^3+(\sqrt[4]{(x+h)^3})^2\sqrt[4]{x^3}+(\sqrt[4]{(x+h)^3})(\sqrt[4]{x^3})^2+(\sqrt[4]{x^3})^3}=$$

$$=\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\frac{1}{(\sqrt[4]{(x+h)^3})^3+(\sqrt[4]{(x+h)^3})^2\sqrt[4]{x^3}+(\sqrt[4]{(x+h)^3})(\sqrt[4]{x^3})^2+(\sqrt[4]{x^3})^3}=$$

$$\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}\frac{1}{(\sqrt[4]{(x+h)^3})^3+(\sqrt[4]{(x+h)^3})^2\sqrt[4]{x^3}+(\sqrt[4]{(x+h)^3})(\sqrt[4]{x^3})^2+(\sqrt[4]{x^3})^3}=$$

$$=\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}\frac{1}{(\sqrt[4]{(x+h)^3})^3+(\sqrt[4]{(x+h)^3})^2\sqrt[4]{x^3}+(\sqrt[4]{(x+h)^3})(\sqrt[4]{x^3})^2+(\sqrt[4]{x^3})^3}=$$

$$=\frac{3x^2+3xh+h^2}{(\sqrt[4]{(x+h)^3})^3+(\sqrt[4]{(x+h)^3})^2\sqrt[4]{x^3}+(\sqrt[4]{(x+h)^3})(\sqrt[4]{x^3})^2+(\sqrt[4]{x^3})^3}$$

ולכן

$$(\sqrt[4]{x^3})'=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[4]{(x+h)^3}-\sqrt[4]{x^3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+3xh+h^2}{(\sqrt[4]{(x+h)^3})^3+(\sqrt[4]{(x+h)^3})^2\sqrt[4]{x^3}+(\sqrt[4]{(x+h)^3})(\sqrt[4]{x^3})^2+(\sqrt[4]{x^3})^3}=$$

$$\frac{3x^2}{(\sqrt[4]{x^3}^3+(\sqrt[4]{x^3})^2\sqrt[4]{x^3}+(\sqrt[4]{x^3})(\sqrt[4]{x^3})^2+(\sqrt[4]{x^3})^3}=\frac{3x^2}{4(\sqrt[4]{x^3})^3}=\frac{3x^2}{4\sqrt[4]{x^9}}=\frac{3x^2}{4x^{9/4}}=\frac{3}{4x^{1/4}}=\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$$

תשובה 6 א.

ב: הפונקציה $f(x)=\ln(\frac{x+2}{x^2})$ מוגדרת כאשר המשתנה של ה ln הוא חיובי,

$(\frac{x+2}{x^2}>0)\Leftrightarrow x^2(x+2)>0)\Leftrightarrow D=(-2,0)\cup(0,\infty)$ ועל הטוח כרגע נאמר כי הוא כל הממשיים. אי אפשר לדבר על זוגיות כי ת"ה איננו סימטרי. חתוך עם הצירים: x=0 איננה בתחום ההגדרה. וכמו כן

$f(x)=\ln(\frac{x+2}{x^2})=0\Rightarrow\frac{x+2}{x^2}=1\Rightarrow x+2=x^2\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow x=2,x=-1$ ושתי הנקודות הן בתחום ההגדרה. לעומת זאת אין חתוך עם ציר y כי 0 איננה בתחום ההגדרה. לכן חתוך עם הצירים הן הנקודות (2,0),(-1,0).

$$f(x)=\ln(\frac{x+2}{x^2})=\ln(x+2)-2\ln(x),\ f'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x}=\frac{x-2(x+2)}{x(x+2)}=$$

$$=\frac{-x-4}{x(x+2)}=-\frac{x+4}{x(x+2)},\ f''=-\frac{x(x+2)-(x+2+x)(x+4)}{(x)^2(x+2)^2}=-\frac{x^2+2x-(2x+2)(x+4)}{(x)^2(x+2)^2}=$$

$$-\frac{-x^2-8x-8}{(x+3)^2(x+5)^2}=\frac{(x+4-2\sqrt{2})(x+4+2\sqrt{2})}{(x+3)^2(x+5)^2}$$

לכן $f'>0\Leftrightarrow\frac{x+4}{x(x+2)}<0\Leftrightarrow x(x+2)(x+4)<0\Leftrightarrow(x\in D)\wedge(-2<x<0)$ כלומר f עולה בקטע (-2,0) ויורדת בקטע (0,∞). השרש $-4-2\sqrt{2}$ הוא מחוץ לתחום ההגדרה ולכן הסימן של "f נקבע לפי הסימן של $(x+4-2\sqrt{2})$. לכן f מחייכת כאשר $x>-4+2\sqrt{2}$.

F בוכה כאשר $x<-4+2\sqrt{2}$ ו $x=-4+2\sqrt{2}$ היא נקודת פתול.

כעת נבדוק אסימפטוטות. כאשר x שואף לאינסוף נקבל

נציב $\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln(x+2)-2\ln(x)}{x}.\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/(x+3)-2/x}{1}=\frac{0-0}{1}=0=a$

לחשב את b ונקבל $b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-0x)=\lim_{x\to\infty}\ln(\frac{x+2}{x^2})=\ln(0+)=-\infty.$ ולכן אין אסימפטוטה משופעת. נחשבארבעה גבולות חד צדדיים כדי לומר אודות

$$\lim_{x\to-2+}\ln(\frac{x+2}{x^2})=\lim_{x\to-2+}\ln(\frac{0+}{4})=\ln(0)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to0-}\ln(\frac{x+2}{x^2})=\lim_{x\to0-}\ln(\frac{2}{0+})=\ln(\infty)=\infty$$

אסימפטוטות אנכיות.

$$\lim_{x\to0+}\ln(\frac{x+2}{x^2})=\lim_{x\to0+}\ln(\frac{2}{0+})=\ln(\infty)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln(\frac{x+2}{x^2})=\lim_{x\to\infty}\ln(\frac{1+(1/x)}{x})=\ln(0+)=-\infty$$

וכעת $f(-2,0)=(-\infty,\infty),\ f(0,\infty)=(-\infty,\infty)$, ולכן התמונה המדויקת היא $\mathbb{R}$.

תשובה 7

א. הדבר אינו נכון דוגמא נגדית $f(x)=x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו $g(x)=x^2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$
אז $h=f+g=x+x^2, h(-x)=(-x)+(-x)^2=x^2-x$ וזה אינו מתאים לזוגיות ולאי זוגיות

ב. נביט ב $f=\begin{cases}1 & x<0\\ -1 & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$. אז לכל $x\neq 0$ מתקיים $f(-x)=-f(x)$ וב-0 יש נקודת קפיצה.