המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>מבחן סוף בקורס אינפי א –סמסטר סתו התשע"ו מבחן דוגמא 2</u>

יום ד, כט אדר א ה'תשע"ו 9-3-2016

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה   המתרגל שגיא לוי.

משך הבחינה: <u>שעתיים וחצי</u>

חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. (20%)

א. נסח <u>והוכח</u> את משפט לגרנג'.

ב. הוכח כי למשוואה $f(x)=e^{4x}+7x-8$ יש שורש אחד בדיוק.

2. חשב שניים מתוך שלושת הגבולות הבאים: (18%)

א. $\lim_{x\to 0+} x\ln x$

ב. $\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$

ג. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{x-\sin(2x)}$

3. (9%) לאילו ערכים של a,b הפונקציה הבאה תהיה רציפה וגזירה על כל הממשיים.

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+ax+7 & x\le 1\\ 2x+b & 1<x\end{cases}$$

4. הוכח לפי הגדרת הגבול כי מתקיים: (10%)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{4/3}=1$$

5. חשב לפי ההגדרה את הנגזרת של $\sqrt[4]{x}$: (9%)

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\ln(\frac{x+3}{x+5})$ (25%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

א : תחום הגדרה וטווח
ב : נקודות חיתוך עם הצירים.
ג : זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.
ד : תחומי עליה וירידה.
ה : נקודות קיצון.
ו : נקודות פיתול , תחומי קמירות כלפי מעלה וקמירות כלפי מטה.
ז : אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.
ח : שרטט את גרף הפונקציה.
ט : תמונה מדויקת

7. הוכח או הפרך או תן דוגמא (אפשר להפריך בדוגמא נגדית) (10%)
   א. נתונה פונקציה איזוגית $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ אז חיב להתקיים כי f(0)=0.
   ב. תן דוגמא לפונקציה אשר עולה בכל קטע מתחום ההגדרה שלה ואיננה פונקציה עולה..

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ הוא $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, a^0 = 1,$$
$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו $0 < a, a \neq 1$.

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$
$$\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a \sqrt[y]{x} = \tfrac{1}{y} \cdot \log_a x;$$
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x} = x, \qquad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828..$$
$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

גבולות בסיסיים $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1, \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1, \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \left(x^a\right)' = ax^{a-1}, \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (e^x)' = e^x;$$

$$\left(\arccos(x)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$\left(\arctan(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\left(\operatorname{arc}\cot(x)\right)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$.(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C; \ldots\ldots \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C; \ldots\ldots \int \cos xdx = \sin x + C;$$

$$\int \sin xdx = -\cos x + C; \ldots\ldots \int e^x dx = e^x + C; \ldots\ldots \int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1; .. \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C; \ldots \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C; \ldots \int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

11.

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות :

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

:

$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

:

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות

תשובה 1 סעיף ב

$f(x)=e^{4x}+7x-8$

נשים לב כי זו פונקציה אלמנטרית כחבור חסור והרכבה של כאלה, ומוגדרת לכל ממשי בתור חבור של כאלה. לכן הפונקציה רציפה וגזירה בכל תחום הגדרתה ובנוסף מתקיים $f(0)<0, f(1)>0$, ולכן לפי משפט ערך הביניים של קושי יש לה שורש אחד לפחות בקטע $[0,1]$. כמו כן $f'(x)=4e^{4x}+7$ אשר מקבלת בטווח ערכים חיוביים בלבד ולכן f עולה ולכן חח״ע ולכן הפתרון יחיד.

תשובה 2 א

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0\cdot(-\infty)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x}=\frac{-\infty}{\infty}\square\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2}\square\lim_{x\to 0+}-x=0$$

תשובה 2 ב

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}=(1+0)^{\frac{1}{1-1-0}}=1^{\pm\infty}=\lim_{x\to 0}[(1+\frac{1}{1/x^2})^{1/x^2}]^{\frac{x^2}{e^x-1-x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1-x}},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1-x}=\frac{0}{0}\square\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^x-1}=\frac{0}{0}=\square\lim_{x\to 0}\frac{2}{e^x}=2.\lim\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}=e^2$$

:

תשובה 2 ג

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x-\sin(2x)}=\frac{0}{0-0}\square\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)}{1-2\cos(2x)}=\frac{2}{-1}=-2$$

תשובה 3

.

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+ax+7 & x\le 1\\ 2x+b & 1<x\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x+a & x<1\\ 2 & 1<x\end{cases}$$

$\lim_{x\to 1-} 2x^2+ax+7=2+7+a, \lim_{x\to 1+} 2x+b=2+b$ ולכן כדי שהפונקציה

$\lim_{x\to 1-} 2x+a=2+a, \lim_{x\to 1+} 2=2$

תהיה רציפה וגזירה מתקיים כי $9+a=2+b, 2+a=2\Rightarrow a=0, b=7$

תשובה 4

$\frac{n}{n+1}<1 \to (\frac{n}{n+1})^{4/3} < 1^{4/3} = 1$ ולכן

$$0<1-(\frac{n}{n+1})^{4/3}<\varepsilon \Leftrightarrow 1-\varepsilon<(\frac{n}{n+1})^{4/3} \Leftrightarrow (1-\varepsilon)^{3/4}<\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}<1-(1-\varepsilon)^{3/4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-(1-\varepsilon)^{3/4}}<n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-(1-\varepsilon)^{3/4}}-1<n$$

תשובה 5

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt[4]{x+h}-\sqrt[4]{x}}{h}=\frac{\sqrt[4]{x+h}-\sqrt[4]{x}}{h}\frac{(\sqrt[4]{x+h})^3+(\sqrt[4]{x+h})^2\sqrt[4]{x}+(\sqrt[4]{x+h})(\sqrt[4]{x})^2+(\sqrt[4]{x})^3}{(\sqrt[4]{x+h})^3+(\sqrt[4]{x+h})^2\sqrt[4]{x}+(\sqrt[4]{x+h})(\sqrt[4]{x})^2+(\sqrt[4]{x})^3}=$$

$$=\frac{x+h-x}{h}\frac{1}{(\sqrt[4]{x+h})^3+(\sqrt[4]{x+h})^2\sqrt[4]{x}+(\sqrt[4]{x+h})(\sqrt[4]{x})^2+(\sqrt[4]{x})^3)}=$$

$$=\frac{1}{(\sqrt[4]{x+h})^3+(\sqrt[4]{x+h})^2\sqrt[4]{x}+(\sqrt[4]{x+h})(\sqrt[4]{x})^2+(\sqrt[4]{x})^3}$$

ולכן

$$(\sqrt[4]{x})'=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+h}-\sqrt[4]{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt[4]{x+h})^3+(\sqrt[4]{x+h})^2\sqrt[4]{x}+(\sqrt[4]{x+h})(\sqrt[4]{x})^2+(\sqrt[4]{x})^3}=$$

$$\frac{1}{(\sqrt[4]{x})^3+(\sqrt[4]{x})^3+(\sqrt[4]{x})^3+(\sqrt[4]{x})^3}=\frac{1}{4(\sqrt[4]{x})^3}$$

תשובה 6 א.

ב: הפונקציה $f(x)=\ln(\frac{x+3}{x+5})$ מוגדרת כאשר המשתנה של ה ln הוא חיובי,

$(\frac{x+3}{x+5}>0) \Leftrightarrow 5(x+3)(x+5)>0) \Leftrightarrow D=(-\infty,-5)\cup(-3,\infty)$ ועל הטוח כרגע נאמר כי

הוא כל הממשיים. אי אפשר לדבר על זוגיות כי ת"ה איננו סימטרי. חתוך עם

הצירים: $f(0)=\ln(\frac{0+3}{0+5})=\ln(\frac{3}{5})=\ln(3)-\ln(5)$ וכמו כן

$f(x)=\ln(\frac{x+3}{x+5})=0 \Rightarrow \frac{x+3}{x+5}=1 \Rightarrow x+3=x+5 \Rightarrow 5=3$ **לכן** $(0,\ln(3/5))$ נקודת חיתוך

יחידה עם הצירים.

ד: ה: ו

$$f(x)=\ln(\frac{x+3}{x+5})=\ln(x+3)-\ln(x+5),\ f'(x)=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}=\frac{(x+5)-(x+3)}{(x+5)(x+3)}=\frac{2}{(x+3)(x+5)}$$

$$f''=-2\frac{1\cdot(x+3)+1\cdot(x+5)}{(x+3)^2(x+5)^2}=\frac{-2(2x+8)}{(x+3)^2(x+5)^2}=\frac{-4(x+4)}{(x+3)^2(x+5)^2}$$

לכן $x \in D \Leftrightarrow 2(x+3)(x+5) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x+3)(x+5)} > 0 \Leftrightarrow f' > 0$ כלומר f עולה בכל קטע שבתחום ההגדרה. בנוסף $x < -4 \Leftrightarrow x+4 < 0 \Leftrightarrow \frac{-4(x+4)}{(x+3)^2(x+5)^2} > 0 \Leftrightarrow f'' > 0$ ונקודת הפתול מחוץ לתחום ההגדרה, ולכן f קמורה בזרוע השמאלית שלה וקעורה בזרוע הימנית שלה.

ולכן הנקודות בהן חל שנוי הן x=-3,x=-5,x=-4, כלן אינן בתחום ההגדרה. בקטע -3 עד אינסוף f עולה, בקטע ממינוס אינסוף עד -5 f יורדת היא בוכה כאשר x>-4, מחייכת כאשר x<-4, ואין נקודת פתול. כעת נבדוק אסימפטוטות. כאשר x שואף לפלוס מינוס אינסוף נקבל

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/(x+3)-1/(x+5)}{1} = \frac{0-0}{1} = 0 = a$. נציב $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(x+3)-\ln(x+5)}{x}$

לחשב את b ונקבל $b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-0x) = \lim_{x\to\infty}\ln(\frac{x+3}{x+5}) = \ln(1) = 0.$ ולכן אסימפטוטה משופעת היא הקו האפקי y=0. נחשב שני גבולות חד צדדיים כדי לומר אודות אסימפטוטות אנכיות.

$$\lim_{x\to-5-}\ln(\frac{x+3}{x+5}) = \lim_{x\to-2+}\ln(\frac{-2}{0-}) = \ln(\infty) = \infty,$$

$$\lim_{x\to-3+}\ln(\frac{x+3}{x+5}) = \lim_{x\to 0+}\ln(\frac{0+}{2}) = \ln(0+) = -\infty$$

וכעת $f(-\infty,-5) = (0,\infty),\ f(-3,\infty) = (-\infty,0)$, ולכן התמונה המדויקת היא $\mathbf{R}-\{0\}$.

תשובה 7

א. הדבר נכון נסמן f(0)=a ואז f(0)=f(-0)=-f(0)=-a, והמספר היחיד אשר שוה למינוס עצמו הוא 0.

ב. נביט בפונקציה $f(x) = \frac{-1}{x}$ אז מתקיים $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ אשר היא חיובית תמיד, אבל הגרף אינו עולה, כי כשעוברים מ-x שלילי לחיובי אז י קפיצה אינסופית כלפי מטה.