**המכללה האקדמית נתניה ע"ר**
**רח' האוניברסיטה 1**
**קרית יצחק רבין**
**נתניה 42365**

**NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)**
**1 University St.**
**Kiryat Yitzhak Rabin**
**NETANYA 42365, ISRAEL**

**<u>מבחן סוף בקורס אינפי א –סמסטר סתו התשע"ו מבחן דוגמא 3</u>**

**יום ד,** כט אדר א ה'תשע"ו 9-3-2016

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה המתרגל שגיא לוי.

**משך הבחינה: <u>שעתיים וחצי</u>**

חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. (20%)

א. נסח <u>והוכח</u> את משפט רול.

ב. כמה שרשים יש למשוואה $f(x)=x^3-9x^2+15x-5$ .

2. חשב שניים מתוך שלושת הגבולות הבאים: (18%)

א. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$

ב. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

ג. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\ln(1+x)-x}$

3. (9%) לאילו ערכים של a,b הפונקציה הבאה תהיה רציפה וגזירה על כל הממשיים.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+7 & x\le 3 \\ bx^2+ax+7 & 3<x \end{cases}$$

4. הוכח לפי הגדרת הגבול כי מתקיים: (10%)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{5/4}=1$$

5. חשב לפי ההגדרה את הנגזרת של $\sqrt{x^3}$ : (9%)

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-2}{e^{2x}}$ (25%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

א : תחום הגדרה וטווח
ב : נקודות חיתוך עם הצירים.
ג : זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.
ד : תחומי עליה וירידה.
ה : נקודות קיצון.
ו : נקודות פיתול , תחומי קמירות כלפי מעלה וקמירות כלפי מטה.
ז : אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.
ח : שרטט את גרף הפונקציה.
ט : תמונה מדויקת

7. הוכח או הפרך או תן דוגמא (אפשר להפריך בדוגמא נגדית) (10%)
   א. נתונה הפונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ עולה ו $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ יורדת אז $g\circ f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ יורדת.
   ב. תן דוגמא לפונקציה מחזורית שאיננה טריגונומטרית ואיננה קבועה.

בהצלחה!!!

# דף נוסחאות

## 1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

## 2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ הוא $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

## 3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, a^0 = 1,$$
$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

## 4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו $0 < a, a \neq 1$.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$
$$\log_a(x / y) = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a \sqrt[y]{x} = \tfrac{1}{y} \cdot \log_a x;$$
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x} = x, \qquad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828..$$
$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

גבולות בסיסיים $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

## 5.הגדרת נגזרת הפונקציה $f$ בנקודה $x_0$: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

## 6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \left(x^a\right)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x;$$

$$\left(\arccos(x)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$\left(\arctan(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\left(\operatorname{arc}\cot(x)\right)' = -\frac{1}{1+x^2}, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

## 7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

## 8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C; \ldots\ldots \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C; \ldots\ldots \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \ldots\ldots \int e^x dx = e^x + C; \ldots\ldots \int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1; \ldots \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C; \ldots \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C; \ldots \int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

## 9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

### אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

$\pi$ רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

:

$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

### ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

:

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

### ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות

תשובה 1 סעיף ב

$f(x)=x^3-9x^2+15x-5$ זהו פולינום ונערוך לו חקירה (לא מלאה).

$$f(x)=x^3-9x^2+15x-5=x^3(1-\frac{9}{x}+\frac{15}{x^2}-\frac{5}{x^3}).\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x^3=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$

ובנוסף $f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$ ובנוסף

$f(1)=16-14=2,\ f(5)=125-225+75-5=-30$ . כלומר בקטע $(-\infty,1)$ f עולה מגובה $-\infty$ לגובה 2, ולכן יש לה בדיוק שרש אחד בקטע, בקטע $(-1,5)$ f יורדת מגובה 2 לגובה -30, ולכן יש לה בדיוק שרש אחד בקטע, ובקטע $(5,\infty)$ f עולה מגובה -30 לגובה $\infty$ לגובה 2, ולכן יש לה בדיוק שרש אחד בקטע, וביחד בדיוק שלשה שרשים.

תשובה 2 א

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{1-\sqrt{x}}=\frac{1}{1-1}-\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=\lim_{x\to1}\frac{1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)}-\frac{1+\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}{1-x}-\frac{1+\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2-\sqrt{x}}{1-x}=\frac{1}{0}=\infty$$

תשובה 2 ב

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=1^{\infty}=\lim_{x\to0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}(1+\frac{1}{1/(\cos x-1)})^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}(1+\frac{1}{1/(\cos x-1)})^{\frac{\cos x-1}{\cos x-1}\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to0}[(1+\frac{1}{1/(\cos x-1)})^{\frac{1}{\cos x-1}}]^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2x}}=e^{\lim_{x\to0}\frac{-\cos x}{2}}=e^{\frac{-1}{2}}$$

:

תשובה 2 ג

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{\ln(1+x)-x}=\frac{1-1-0}{0-0}\ \square\ \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{1/(1+x)-1}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{(1-(1+x))/(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)(e^x-1)}{-x}=$$

$$=-\lim_{x\to0}(1+x)\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)}{x}=(-1)\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)}{x}\ \square\ -\lim_{x\to0}\frac{e^x}{1}=-1$$

## תשובה 3

.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+7 & x\le 3 \\ bx^2+ax+7 & 3<x \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & x\le 3 \\ 2bx+a & 2<x \end{cases}$$

ולכן כדי $\lim_{x\to 3-} ax^2+bx+7=9a+3b+7, \lim_{x\to 3+} bx^2+ax+7=9b+3a+7$

$\lim_{x\to 3-} 2ax+b=6a+b, \lim_{x\to 3+} 2bx+a=6b+a$

שהפונקציה תהיה רציפה וגזירה מתקיים כי

כלומר יש חופש בבחירה $9a+3b+7=9b+3a+7, 6a+b=6b+a \Rightarrow a=b$

של a, כל זמן שהוא שווה ל-b.

## תשובה 4

ולכן $\frac{n}{n+1}<1 \to (\frac{n}{n+1})^{5/4}<1^{5/4}=1$

$$0<1-(\frac{n}{n+1})^{5/4}<\varepsilon \Leftrightarrow 1-\varepsilon<(\frac{n}{n+1})^{5/4} \Leftrightarrow (1-\varepsilon)^{4/5}<\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}<1-(1-\varepsilon)^{4/5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-(1-\varepsilon)^{4/5}}<n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-(1-\varepsilon)^{4/5}}-1<n$$

## תשובה 5

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{(x+h)^3}-\sqrt{x^3}}{h}=\frac{\sqrt{(x+h)^3}-\sqrt{x^3}}{h}\frac{\sqrt{(x+h)^3}+\sqrt{x^3}}{\sqrt{(x+h)^3}+\sqrt{x^3}}=$$

ולכן

$$=\frac{(x+h)^3-x^3}{h(\sqrt{(x+h)^3}+\sqrt{x^3})}=\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h(\sqrt{(x+h)^3}+\sqrt{x^3})}=\frac{3x^2+3xh+h^2}{\sqrt{(x+h)^3}+\sqrt{x^3}}$$

$$(\sqrt{x^3})'=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^3}-\sqrt{x^3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+3xh+h^2}{\sqrt{(x+h)^3}+\sqrt{x^3}}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}=\frac{3\sqrt{x}}{2}$$

## תשובה 6 א.

ב: הפונקציה $f(x)=\frac{x-2}{e^{2x}}$ מוגדרת כאשר לכל x. ועל הטוח כרגע נאמר כי הוא כל

הממשיים. תחום ההגדרה סימטרי. ובנוסף $f(-x)=\frac{-x-2}{e^{-2x}}\neq f(x). f(-x)\neq -f(x)$

ולכן הפונקציה איננה זוגית ואיננה איזוגית. נקודות חתוך עם הצירים

ולכן נקודות חתוך עם הצירים $f(x)=\frac{x-2}{e^{2x}}=0\to x=2$ . $f(0)=\frac{-2}{e^0}=-2.$

$.(0,-2),(2,0)$

ד: ה: ו

$$f(x)=\frac{x-2}{e^{2x}}, f'(x)=\frac{e^{2x}-2e^{2x}(x-2)}{(e^{2x})^2}=\frac{e^{2x}(1-2(x-2))}{e^{4x}}=\frac{5-2x}{e^{2x}}$$

$$f''=\frac{-2e^{2x}-2e^{2x}(5-2x)}{(e^{2x})^2}=\frac{e^{2x}(2(2x-5)-2)}{e^{4x}}=\frac{4x-12}{e^{2x}}$$

לכן $f'>0 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{e^{2x}}>0 \Leftrightarrow 2x-5>0 \Leftrightarrow x>5/2$ כלומר f עולה בקטע $(-\infty,5/2)$

ויורדת בקטע $(5/2,\infty)$ ולכן בנקודה 5/2 יש מקסימום מקומי ומוחלט. בנוסף f קמורה בקטע $(3,\infty)$ וקעורה בקטע $(-\infty,3)$ ו x=3 נקודת פתול.

. כעת נבדוק אסימפטוטות. אין אסימפטוטות מאונכות כי הפונקציה מוגדרת לכל x, ונבדוק אסימפטוטות משופעות.

כאשר x שואף לפלוס מינוס אינסוף נקבל

$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{xe^{2x}}=\frac{\infty}{\infty}\square\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{2x}+2xe^{2x}}=\frac{1}{\infty}=0$ נציב לחשב את b ונקבל

$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-0x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{e^{2x}}=\frac{\infty}{\infty}\square\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}}=\frac{1}{\infty}=0.$ ולכן אסימפטוטה משופעת היא הקו האפקי y=0. כיון שהפונקציה איננה רציונלית נחשב גם אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$. $a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{xe^{2x}}=\frac{-\infty}{(-\infty)0}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{2x}}=1\cdot\frac{1}{0}=\infty$ . כיון ש a לא סופית אין אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$. בנוסף $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{e^{2x}}=\frac{-\infty}{0+}=-\infty$ ו $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{e^{2x}}=0$. נשים לב כי $f(5/2)=\frac{5/2-2}{e^{2\cdot(5/2)}}=\frac{1}{2e^{5}}$ ולכן התמונה המדויקת היא $(-\infty,\frac{1}{2e^{5}}]$ .

תשובה 7

8. הוכח או הפרך או תן דוגמא (אפשר להפריך בדוגמא נגדית) (10%)

ג. נתונה הפונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ עולה ו $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ יורדת אז $g\circ f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ יורדת.
תן דוגמא לפונקציה מחזורית שאיננה טריגונומטרית ואיננה קבועה

א. הדבר נכון אם f עולה אז $(a<b)\Rightarrow(f(a)<f(b))$ ואם g יורדת אז $(a<b)\Rightarrow(g(a)>g(b))$ ואז עבור
$(a<b)\Rightarrow(f(a)<f(b))\Rightarrow g(f(a))>g(f(b))$

ב. נביט בפונקציה $f(x)=\{x\}=x-[x]$ שאודותיה דברנו בכיתה, יש לה אינסוף קטעי עליה, בכל תחום $[z,z+1],z\in\mathbf{Z}$ הפונקציה עולה מ-0 ל-1.