המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

# מבחן סוף בקורס אינפיב-סמסטר אביב, מועד א.

יום א, כט תמוז התשע"ד 27-7-2014

- מורה : גיורא דולה.
- משך המבחן שלוש שעות.
- מותר להשתמש במחשבונים לא מדעיים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- יש לנמק את כל החשובים.
- המבחן כולל 9 שאלות. משקל כל שאלה כתוב לידה.
- שאלות 1 סעיף א, ו8 הן שאלות הוכחה בנות משקל של 10 נקודות כ"א.

**בהצלחה.**

עמותה רשומה 580242451 Fax: (972-9) 8844439 :פקס Tel: (972-9) 8607777 :טל

**<u>ענה על כל השאלות הבאות :</u>**

1. א. נסח **<u>והוכח</u>** את מבחן ראבה. (גרסת האיברים) (10%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא : $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{e(e+1)(e+2)\cdots(e+n-1)}{\pi(\pi+1)(\pi+2)\cdots(\pi+n-1)}}$ (8%)

2. חשב את האינטגרל הבא : (8%)

$$\int\frac{-2x^2+20x+190}{(x^2-25)(x+3)}dx$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות (8%) :

$f(x)=-3x^3-3x^2-6x$ ו $g(x)=3x^3+4x^2-5x$

4. חשב את אורך הקשת של העקומה $48yx^4-1=24x^{10}$ (8%)
בתחום : $2\le x\le 6$ .

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא : $\int_5^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}\sin(2x)dx$ נמק. (8%)

6. מצא את הגבול הבא : (8%)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n^3}{n^4+n^2}+\frac{8n^3}{n^4+(2n)^2}+\frac{8n^3}{n^4+(3n)^2}+...+\frac{8n^3}{n^4+(n^2)^2}\right)$$

7. בדוק התכנסות ארבעה מתוך חמשת הטורים הבאים. נמק . (32%)

א : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pi)^n n!}{n^n}$

ב:

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{5}{n \cdot \ln^7(2n)}$$

ג:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(1-\frac{6}{2n+3})^n}$$

ד:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(8^n)}{n \cdot \sqrt{n}}$$

ה:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.1}{(1+\frac{3}{2n})^n}$$

8. הוכח כי אם נתונות שתי חלוקות סופיות T,R של אותו קטע, ונתון כי R⊂T אז מתקיים עבור סכומי דרבו העליונים כי SU(T)≤SU(R) ועבור סכומי דרבו התחתונים כי SL(R)≤SL(T) (10%)

בהצלחה!!!

# דף נוסחאות

## 1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

## 2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

## 3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y}, (ab)^x=a^xb^x, \sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x}, a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy}, a^{-x}=\frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

## 4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a, a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

## 5.הגדרת נגזרת הפונקציה $f$ בנקודה $x_0$: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

## 6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)'=ax^{a-1},\qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

## 7. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))' = a\cdot f'(x);$$
$$(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$
$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

## 8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a\neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \arctan x + C$$

## 9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x)\pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a}+C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח :

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x:

$$V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y:

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

ה. אורך קו:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

$\pi$ רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \qquad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1; \qquad \tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}; \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

:

$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

## ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

:

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

## ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

## תשובות

### 1-ב

$$a_n=\sqrt{\frac{e(e+1)(e+2)\cdots(e+n-1)}{\pi(\pi+1)(\pi+2)\cdots(\pi+n-1)}},\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\sqrt{\frac{e+n}{\pi+n}},\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1,\ n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n(\sqrt{\frac{\pi+n}{e+n}}-1)=$$

$$=n\frac{(\sqrt{\pi+n}-\sqrt{e+n})}{(\sqrt{e+n})}=n\frac{\pi-e}{(\sqrt{e+n})(\sqrt{\pi+n}+\sqrt{e+n})}=\frac{\pi-e}{(\sqrt{e+n}/\sqrt{n})(\sqrt{\pi+n}+\sqrt{e+n})/\sqrt{n}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\frac{\pi-e}{(1)(1+1)}=\frac{\pi-e}{2}\sim 0.2<1.$$

לכן הטור מתבדר.

.2

$$\frac{-2x^2+20x+190}{(x^2-25)(x+3)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+5}+\frac{C}{x+3}.-2x^2+20x+190=A(x+5)(x+3)+B(x-5)(x+3)+C(x^2-25).$$

$$\to 80A=240,20B=40,-16C=112,A=3,B=2,C=-7,\frac{-2x^2+20x+190}{(x^2-25)(x+3)}=\frac{3}{x-5}+\frac{2}{x+5}-\frac{7}{x+3}.$$

$$\int\frac{-2x^2+20x+190}{(x^2-25)(x+3)}dx=3\ln|x-5|+2\ln|x+5|-7\ln|x+3|+C$$

.3

$$f(x)=-3x^3-3x^2-6x=g(x)=3x^3+4x^2-5x\to g-f=6x^3+7x^2+x=0,x(6x+1)(x+1)=0,$$

$$x=0,-1,-1/6,(g-f)(-2)<0,(g-f)(-0.1)>0,(g-f)(-0.5)<0,(g-f)(1)>0,$$

$$A=\int_{-1}^{-1/6}(g-f)dx-\int_{-1/6}^{0}(g-f)dx.\int(g-f)dx=(3/2)x^4+(7/3)x^3+(1/2)x^2=h(x).$$

$$A=2h(-1/6)-h(-1)-h(0)=2[(3/2)(-1/6)^4+(7/3)(-1/6)^3+(1/2)(-1/6)^2]$$

$$-[(3/2)(-1)^4+(7/3)(-1)^3+(1/2)(-1)^2]-0=\frac{1(3-28+36)}{1296}-\frac{(9-14+3)}{6}=\frac{11}{1296}+\frac{1}{3}=\frac{11+432}{1296}=\frac{443}{1296}$$

.4 חשב את אורך הקשת של העקומה $48yx^4-1=24x^{10}$ (8%)
בתחום: $2\le x\le 6$ .

$$x^4 - 1 = 24x^{10} \to y = \frac{1}{48x^4} + \frac{x^6}{2} \to y' = -\frac{1}{12x^5} + 3x^5, (y')^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{144x^{10}} + 9x^{10},$$

$$')^2 + 1 = \frac{1}{12x^5} + 3x^5, \int \sqrt{(y')^2 + 1}dx = \frac{-1}{48x^4} + \frac{x^6}{2} = L(x), L(6) - L(2) = (\frac{-1}{48 \cdot 6^4} + \frac{6^6}{2}) - (\frac{-1}{48 \cdot 2^4} + \frac{2^6}{2}) =$$

$$8(\frac{1}{16} - \frac{1}{1296}) + 18 \cdot 1296 - 32 = \frac{1}{384}(1 - \frac{1}{81}) + 23328 - 32 = \frac{80}{31104} + 23296 = 23296 + \frac{20}{7776} = 23296 + \frac{5}{1944}$$

5

$$\int_5^\infty \frac{\ln x}{x^2}\sin(2x)dx = ?,\ f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, g(x) = \sin(2x), \int_a^b \sin(2x)dx =$$

$$= -\frac{\cos(2x)}{2}\bigg|_a^b = \frac{\cos(2a) - \cos(2b)}{2}, |\int_a^b \sin(2x)dx| \le \frac{1+1}{2} = 1. \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2} \doteq \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2} = 0.$$

$$(\frac{\ln x}{x^2})' = \frac{(1/x)x^2 - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{x(1 - 2\ln(x))}{x^4} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}.(f' < 0) \leftrightarrow (2\ln(x) > 1) \leftrightarrow (x > \sqrt{e})$$

6

$$\frac{8n^3}{n^4 + n^2} + \frac{8n^3}{n^4 + (2n)^2} + \frac{8n^3}{n^4 + (3n)^2} + ... + \frac{8n^3}{n^4 + (n^2)^2} = 8\frac{1}{n}(\frac{1}{1 + (1/n)^2} + \frac{1}{1 + (2/n)^2} ... + \frac{1}{1 + (n/n)^2}).$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{8n^3}{n^4 + n^2} + \frac{8n^3}{n^4 + (2n)^2} + \frac{8n^3}{n^4 + (3n)^2} + ... + \frac{8n^3}{n^4 + (n^2)^2}) = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

7. א

$$a_n = \frac{(\pi)^n n!}{n^n}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \pi(\frac{n}{n+1})^n = \frac{\pi}{(1 + \frac{1}{n})^n}. \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi}{e}$$

הטור מתבדר לפי

מבחן ד'אלמברט

ב :

$$f(x) = \frac{5}{x \cdot \ln^7(2x)}, f'(x) = -\frac{5(\ln^7(2x) + 7\ln^6(2x)(1/x)x}{x^2 \cdot \ln^{14}(2x)} = -\frac{\ln^6(2x)(5\ln(2x) + 7)}{x^2 \cdot \ln^{14}(2x)} = -\frac{(5\ln(2x) + 7)}{x^2 \cdot \ln^8(2x)},$$

$$(0.5 < x) \to (f'(x) < 0). \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{5}{\infty} = 0.$$

לכן מותר להשתמש במבחן האינטגרל ונקבל

$$\int_5^\infty \frac{5dx}{x \cdot \ln^7(2x)} = ?, u = \ln(2x), du = \frac{dx}{x}, \int_5^\infty \frac{5dx}{x \cdot \ln^7(2x)} = \int_{\ln(10)}^{\ln(\infty)} \frac{5du}{u^7} = \frac{-1}{6u^6}\bigg|_{\ln(10)}^\infty = \frac{1}{6(\ln(10))^6} - 0$$

כיון שהאינטגרל יצא סופי הטור מתכנס לפי מבחן האינטגרל.

ג: $a_n=\frac{7}{(1-\frac{6}{2n+3})^n}, \lim_{n\to\infty} a_n=?, \lim_{n\to\infty} -\frac{6}{2n+3}n=-3. \lim_{n\to\infty} a_n=\frac{7}{e^{-3}}=7e^3\neq 0$ כיון שגבול האיברים אינו 0, הטור אינו מתכנס.

ד: $a_n=(-1)^n\frac{\sin(8^n)}{n\cdot\sqrt{n}}, |a_n|\leq\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}=n^{-1.5}.$ כיון שטור האיברים בהחלט מתכנס, הטור מתכנס בהחלט.

ה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0.1}{(1+\frac{3}{2n})^n}$

$a_n=\frac{0.1}{(1+\frac{3}{2n})^n}, \lim_{n\to\infty} a_n=?, \lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n}n=1.5. \lim_{n\to\infty} a_n=\frac{0.1}{e^{1.5}}=\frac{1}{10e^{1.5}}\neq 0$ כיון שגבול האיברים אינו 0, הטור אינו מתכנס.