המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף בקורס אינפיב-סמסטר אביב, מועד א.

יום ב, ד אב התשע"ה 20-7-2015

- מורה : גיורא דולה.
- משך המבחן שלוש שעות.
- מותר להשתמש במחשבונים לא מדעיים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- יש לנמק את כל החשובים.
- המבחן כולל 8 שאלות.
- שאלות 1 סעיף א, ו8 הן שאלות הוכחה בנות משקל של 10 נקודות כ"א. כל סעיף אחר משקלו 8 נקודות.

בהצלחה.

עמותה רשומה 580242451 Fax: (972-9) 8844439 :פקס Tel: (972-9) 8607777 :טל

ענה על כל השאלות הבאות :

1. א. נסח **והוכח** את מבחן רבה איברים להתכנסות טורים חיוביים. (10%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2}$ (8%)

2. מצא את הגבול הבא : (8%)

$$\lim_{n\to\infty} 3n\left(\frac{1}{4n^2+1^2}+\frac{1}{4n^2+2^2}+\frac{1}{4n^2+3^2}+\cdots+\frac{1}{4n^2+n^2}\right)$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות : (8%)

$f(x)=3x^3-5x^2+8$ ו $g(x)=2x^3-4x^2+6x+8$

4. פתור שתיים משלושת האינגרלים הבאים : (8%) כל סעיף

א. $\int e^{-2x}\cdot\cos(2x)dx$

ב. $\int\frac{7}{5-5\sin x+4\cos x}dx$

ג. $\int\frac{2x^5+4x-19x^3-27}{x^4-9x^2}dx$

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא : $\int_1^{\infty}\sin(x^2)dx$ נמק. (8%)

רמז : השתמש בהצבה : $t=x^2$

6 . חשב את אורך הקשת של העקומה $396y=18x^{11}+\frac{22}{x^9}$ (8%)

בתחום : $1\le x\le 2$.

7. ענה על שלוש מתוך ארבעת הסעיפים הבאים. (8%) כל סעיף

בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק.

א: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2 3^n}$$

ב: $$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt{n+\ln(n)}}$$

ג: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3)\cdots(\pi+n)}$$

ד: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n+7)^n}{(5n-3)^n}$$

8. הוכח כי אם לפונקציה f קים אינטגרל בקטע [a,b] אז f חסומה בקטע (10%).

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x,e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)'=ax^{a-1},\qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x);$$
$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$
$$(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx=C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C;$$
$$\int \cos xdx=\sin x+C;$$
$$\int \sin xdx=-\cos x+C;$$
$$\int e^x dx=e^x+C;$$
$$\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C;$$
$$\int x^a dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C, a\neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C;$$
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x)\pm d(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx=F(x)+C \Rightarrow \int f(ax+b)dx=\frac{F(ax+b)}{a}+C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

תשובות

ב-1

$$a_n=\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdots(2n)^2},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2}=(\frac{2+1/n}{2+2/n})^2,\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n[(\frac{2n+2}{2n+1})^2-1]=$$

$$=\frac{(\frac{2n+2}{2n+1})^2-1}{1/n}.\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\frac{2n+2}{2n+1})\frac{2(2n+1)-2(2n+2)}{(2n+1)^2}}{-1/n^2}=\lim_{n\to\infty}2(\frac{2n+2}{2n+1})\frac{2n^2}{(2n+1)^2}=1$$

אי אפשר להעזר במבחן ראבה גבול אבל.

כיון $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n[(\frac{2n+2}{2n+1})^2-1]=n[\frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2}-1]=n\frac{4n+3}{(2n+1)^2}=\frac{4n^2+3n}{4n^2+4n+1}<1$

שכל איברי הסדרה קטנים מ-1 הטור מתבדר לפי מבחן ראבה איברים.

.2

$$\lim_{n\to\infty}3n(\frac{1}{4n^2+1^2}+\frac{1}{4n^2+2^2}+\frac{1}{4n^2+3^2}+\cdots+\frac{1}{4n^2+n^2})$$

$$3n(\frac{1}{4n^2+1^2}+\frac{1}{4n^2+2^2}+\frac{1}{4n^2+3^2}+\cdots+\frac{1}{4n^2+n^2})$$

$$=\frac{3}{2}\frac{1}{2n}(\frac{1}{1+(1/2n)^2}+\frac{1}{1+(2/2n)^2}+\frac{1}{1+(3/2n)^2}+\cdots+\frac{1}{1+(n/2n)^2}).$$

$$\lim_{n\to\infty}3n(\frac{1}{4n^2+1^2}+\frac{1}{4n^2+2^2}+\frac{1}{4n^2+3^2}+\cdots+\frac{1}{4n^2+n^2})=$$

$$=1.5\int_0^{0.5}\frac{dx}{1+x^2}=1.5\arctan(x)\Big|_0^{0.5}=1.5(\arctan(0.5)-\arctan(0))=1.5\arctan(0.5)$$

3

$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 8 = g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x + 8 \to f - g = x^3 - x^2 - 6x = 0, x(x-3)(x+2) = 0,$

$x = 0, -2, 3, (f-g)(-1) > 0, (f-g)(1) < 0, A = \int_{-2}^{0}(f-g)dx - \int_{0}^{3}(f-g)dx.$

$\int (f-g)dx = (1/4)x^4 - (1/3)x^3 - 3x^2 = h(x). A = 2h(0) - h(-2) - h(3) =$

$= -\{[(1/4)16 + (1/3)8 - 12] + [(1/4)81 - (1/3)(27) - 27]\} =$

$= \frac{27-8}{3} - \frac{81+16}{4} + 39 = 39 + \frac{19}{3} - \frac{97}{4} = 39 + \frac{76-291}{12} = 39 - .\frac{215}{12} = 39 - 17 - \frac{11}{12} = 21\frac{1}{12} =$

$\frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12}$

.4

.א

$\int e^{-2x} \cdot \cos(2x)dx = I, g = e^{-2x}, f' = \cos(2x), g' = -2e^{-2x}, f = \frac{\sin(2x)}{2},$

$I = e^{-2x}\frac{\sin(2x)}{2} - \int -2e^{-2x} \cdot \frac{\sin(2x)}{2}dx = \frac{e^{-2x}\sin(2x)}{2} + \int e^{-2x} \cdot \sin(2x)dx = ?$

$g = e^{-2x}, f' = \sin(2x), g' = -2e^{-2x}, f = -\frac{\cos(2x)}{2}, I = \frac{e^{-2x}\sin(2x)}{2} +$

$-\frac{\cos(2x)}{2}e^{-2x} - \int -2e^{-2x}(-\frac{\cos(2x)}{2}) \cdot dx = \frac{e^{-2x}[\sin(2x) - \cos(2x)]}{2} - I$

$I = \frac{e^{-2x}[\sin(2x) - \cos(2x)]}{4} + C$

$I = \int \frac{7}{5 - 5\sin x + 4\cos x}dx, \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2},$

$I = \int \frac{7}{5 - 5\frac{2t}{1+t^2} + 4\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}, = \int \frac{14}{5 + 5t^2 - 10t + 4 - 4t^2}dx =$

$= \int \frac{14}{t^2 - 10t + +9}dt = \int \frac{14}{(t-1)(t-9)}dt = ?\frac{14}{(t-1)(t-9)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-9},$.ב

$14 = A(t-9) + B(t-1), 8B = 14, -8A = 14, \frac{14}{(t-1)(t-9)} = \frac{7}{4}(\frac{1}{t-9} - \frac{1}{t-1}),$

$I = 1.75(\ln|\frac{t-9}{t-1}|) + C = 1.75(\ln|\frac{\tan(\frac{x}{2}) - 9}{\tan(\frac{x}{2}) - 1}|) + C$

ג.

$$\int \frac{2x^5+4x-19x^3-27}{x^4-9x^2}dx, \frac{2x^5+4x-19x^3-27}{x^4-9x^2} = 2x+\frac{-x^3+4x-27}{x^4-9x^2}$$

$$\frac{-x^3+4x-27}{x^4-9x^2} = \frac{Ax+B}{x^2}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{x+3},$$

$$-x^3+4x-27 = (Ax+B)(x-3)(x+3)+Cx^2(x+3)+Dx^2(x-3),(x=3)\to 54C=-42,$$

$$(x=-3)\to -54D=-12,(x=0)\to -3B=-27,\to C=\frac{-7}{9},D=\frac{2}{9},B=3,A+C+D=-1,$$

$$A=-1-(C+D)=-1-\frac{-15}{27}=-\frac{4}{9},\frac{2x^5+4x-19x^3-27}{x^4-9x^2}=2x+\frac{-\frac{4}{9}x+3}{x^2}-\frac{7}{9}\frac{1}{x-3}+\frac{2}{9}\frac{1}{x+3}$$ ת

$$I = x^2-\frac{4}{9}\ln|x|-\frac{3}{x}-\frac{7}{9}\ln|x-3|+\frac{2}{9}\ln|x+3|+C$$

.5

$$\int_1^\infty \sin(x^2)dx, t=x^2, dt=2xdx=2\sqrt{t}dt, dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}, I=\int_1^\infty \sin(x^2)dx=\int_1^\infty\frac{\sin(t)dt}{2\sqrt{t}}=?, f=\frac{1}{2\sqrt{t}}, g=\sin(t),$$

$$\int_a^b \sin(t)dt=-\cos(b)+\cos(a),\left|\int_a^b\sin(t)dt\right|=|-\cos(b)+\cos(a)|\le|-\cos(b)|+|\cos(a)|\le 2, f'=\frac{-1}{4\sqrt{t^3}},$$

$$(f'<0)\leftrightarrow(t>0),\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{t}}=0$$

.6

$$396y=18x^{11}+\frac{22}{x^9}\to y=\frac{x^{11}}{22}+\frac{1}{18x^9}\to y'=-\frac{1}{2x^{10}}+\frac{x^{10}}{2},(y')^2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^{20}}+\frac{x^{20}}{4},$$

$$\sqrt{(y')^2+1}=\frac{1}{2x^{10}}+\frac{x^{10}}{2},\int\sqrt{(y')^2+1}dx=\frac{x^{11}}{22}-\frac{1}{18x^9}=L(x),L(2)-L(1)=(\frac{2048}{22}-\frac{1}{18\cdot 512})-$$

$$-(\frac{1}{22}-\frac{1}{18})=\frac{2047}{11}+\frac{1}{18}(1-\frac{1}{512})=\frac{2047}{11}+\frac{511}{18\cdot 512}=93.10090159$$

.7

א:

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{(2n)!}{(n!)^2 3^n}, a_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2 3^n},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+2)!(n!)^2 3^n}{2n!(n+1!)^2 3^{n+1}}=\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2 3}=\frac{(2n+1)2}{3(n+1)}.\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4}{3}>1$$

הטור מתבדר לפי מבחן ד'אלמברט

ב:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt{n+\ln(n)}},(0\le\ln(n)\le n)\to(n+0\le n+\ln(n)\le 2n)\to(\sqrt{n}\le\sqrt{n+\ln(n)}\le\sqrt{2}\sqrt{n})\to$$

$$\frac{1}{n\cdot\sqrt{n+\ln(n)}}\le\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{1.5}}$$

הטור חיובי וקטן מטור מתכנס ולכן מתכנס לפי מבחן ההשואה.

ג:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3)\cdots(\pi+n)},,a_n=\frac{n!}{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3)\cdots(\pi+n)},\frac{a_{n+1}}{a_n}=$$

$$=\frac{(n+1)!(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3)\cdots(\pi+n)}{n!(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3)\cdots(\pi+n)(\pi+n+1)}=\frac{n+1}{\pi+n+1}...\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1,n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=$$

$$n\left(\frac{\pi+n+1}{n+1}-1\right)=\frac{\pi n}{n+1}.\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\pi>1$$

הטור מתכנס לפי מבחן רבה.

ד:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n+7)^n}{(5n-3)^n},|a_n|\frac{(4n+7)^n}{(5n-3)^n},\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{4n+7}{5n-3},\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{4}{5}<1$$

הטור מתכנס בהחלט לפי מבחן השורש של קושי