המכללה האקדמית נתניה

מבחן באינפי ב׳

שם המרצה : גיורא דולה
תאריך הבחינה : יום ג טז אב התשע״ג 23-7-2013
משך הבחינה : שלוש שעות
חומר עזר : מחשבון (לא גרפי).

<u>ענה על כל השאלות הבאות :</u>

1. א. נסח והוכח את המבחן האינטגרלי להתכנסות טורים חיוביים. (20%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא : $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{\ln^{-3} n}{n}$

2. חשב את האינטגרל הבא : (10%)

$$\int \frac{3x^2 - 6x + 1}{(x-3)^2 (x+2)} dx$$

3. (10%)מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות :

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 1$ ו $g(x) = x^2 + x - 1$

4. (10%) חשב את אורך הקשת של העקומה $8x^{10} = 48x^4 y - 3$
בתחום : $1 \le x \le 3$.

5. (10%)בדוק התכנסות האינטגרל : $\int_1^{\infty} x^6 \cdot e^{-2x} \cdot \sin(7x) dx$
נמק

6. (40%)בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק .

א :
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}$$

ב :
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$$

ג :
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$$

ד :
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(\sin n!+\cos n^n)}{n\cdot\sqrt{n}}$$

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים :

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),\, a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) הוא $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, a^0 = 1,$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log : $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה : $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו $0 < a, a \neq 1$.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a(x / y) = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a \sqrt[y]{x} = \tfrac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828\ldots$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$.

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S=\int_a^b (g(x)-f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V=\pi\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad \sin^2 x+\cos^2 x=1;$$

$$\tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad \tan x\cdot\cot x=1;$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\qquad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad 1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

:

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

:

ד. סכומים והפרשים :

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

:

ה. מכפלות :

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

תשובות

1-ב נביט על $\sum_{n=7}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln(n))^3}$. כדי לבדוק התכנסות נביט
על $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln(x)^3}$. . נשתמש במבחן האינטגרל, ולכן יש להוכיח כי
$\frac{1}{x\ln(x)^3}$ מונוטונית יורדת ושואפת לאפס. עבור $1<x$ הפונקציות
x,lnx הן חיוביות ועולות, ולכן גם המכפלה $x\ln(x)^3$ חיובית ועולה
ולכן $\frac{1}{x\ln(x)^3}$ חיובית ויורדת וברור ש $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\ln(x)^3}=\frac{1}{\infty^4}=0$. לכן
מותר להשתמש במבחן האינטגרל. כעת נציב $t=\ln(x), dt=\frac{dx}{x}$,
ולכן $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln(x)^3}=\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^3}<\infty$, לכן הטור מתכנס בהחלט.

2. חשב את האינטגרל הבא: $\int\frac{3x^2-6x+1}{(x-3)^2(x+2)}dx$ נקבל

$$\frac{3x^2-6x+1}{(x-3)^2(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x+2}\to 3x^2-6x+1=A(x-3)(x+2)+B(x+2)+C(x-3)^2.$$

$$10=5B, 25=25C, A+C=3,\to\frac{3x^2-6x+1}{(x-3)^2(x+2)}=\frac{2}{x-3}+\frac{2}{(x-3)^2}+\frac{1}{x+2}$$

ולכן ,

$$\int\frac{3x^2-6x+1}{(x-3)^2(x+2)}dx=\int(\frac{2}{x-3}+\frac{2}{(x-3)^2}+\frac{1}{x+2})dx=2\ln|x-3|-\frac{2}{x-3}+\ln|x+2|+C$$

.3

$$f(x)=x^3-4x^2+7x-1, g(x)=x^2+x-1. f=g\to x^3-4x^2+7x-1=x^2+x-1\to x^3-5x^2+6x=0\to$$
$$x(x-2)(x-3)=0\to x=0,2,3, g(1)=1<f(1)=3, f(5/2)=57/8<g(5/2)=31/4$$
$$,S=\int_0^2(x^3-5x^2+6x)dx-\int_2^3(x^3-5x^2+6x)dx. h(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}+3x^2, S=2h(2)-h(0)-h(3)=$$
$$=2(16-\frac{40}{3}+12)-0-(\frac{81}{4}-45+27)=\frac{88}{3}-\frac{9}{4}=\frac{325}{12}.$$

.4

$$8x^{10}=48x^4y-3\to y=\frac{x^6}{6}+\frac{1}{16x^4},y'=x^5-\frac{1}{4x^5},(y')^2=x^{10}+\frac{1}{16x^{10}}-\frac{1}{2},(y')^2+1=x^{10}+\frac{1}{16x^{10}}+\frac{1}{2}=$$

$$=(x^5+\frac{1}{4x^5})^2,l=\int_1^3(x^5+\frac{1}{4x^5})dx=(\frac{x^6}{6}-\frac{1}{16x^4})\Big|_1^3=\frac{729-1}{6}-\frac{1}{81\cdot16}+\frac{1}{16}=121+\frac{81\cdot8-1+81}{81\cdot16}=$$

$$=121+\frac{729-1}{81\cdot16}=121+\frac{91}{162}$$

5- נפריד את האינטגרנד של האינטגרל הבא $\int_1^\infty x^6\cdot e^{-2x}\cdot\sin(7x)dx$

בצורה $f(x)=x^6\cdot e^{-2x},g(x)=\sin(7x)$ ונשים לב כי

$f'(x)=6x^5e^{-2x}-2x^6e^{-2x}=2x^5e^{-2x}(3-x)$ כלומר f'<0 בתנאי ש x<3. בנוסף

$$\lim_{x\to\infty}x^6\cdot e^{-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6}{e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^5}{2e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{30x^4}{4e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{120x^3}{8e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{360x^2}{16e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{720x}{32e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{720}{16e^{2x}}=0.$$

ולכן f אכן שואפת ל-0 כאשר x שואף לאינסוף, ולכן מקיימת את הנדרש במבחן דיריכלה. וכמו כן

$\int_a^b\sin(7x)dx=\frac{-\cos(7x)}{7}\Big|_a^b=\frac{\cos(7a)-\cos(7b)}{7},|\int_a^b\sin(7x)dx|\le\frac{1+1}{7}=\frac{2}{7}$ ולכן גם g

מקיימת את התנאי שהאינטגרל שלה חסום, ולכן האינטגרל מתכנס לפי משפט דיריכלה.

6 סעיף א נתחיל עם מבחן ד'אלמברט

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{n^n}{(2n)!},a_n=\frac{n^n}{(2n)!},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{n^n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)(2n+1)n^n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{2(n+1)(2n+1)n^n}=\frac{(n+1)^n}{2(2n+1)n^n}=$$

$$=\frac{(n+1)^n}{2(2n+1)n^n}=\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{2(2n+1)},\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{2(2n+1)}=\frac{e}{\infty}=0<1$$

לכן הטור מתכנס.

סעיף ב: נביט על מבחן ההשואה $0<\ln(n+1)<n+1\to0<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\ln(n+1)}$

ולכן נובע כי הטור גדול מטור מתבדר ולכן מתבדר בעצמו.

6 סעיף ג נתחיל עם מבחן ד'אלמברט

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}, a_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}, \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)(2n+2)}\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}=\frac{2n+1}{2n+2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.$$

לכן אי אפשר להחליט על התכנסות והתבדרות לפי מבחן ד'אלמברט. נעבור למבחן ראבה.

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n(\frac{2n+2}{2n+1}-1)=\frac{n}{2n+1}, \lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\frac{1}{2}.$$

כיון שהגבול קטן מ-1 הטור מתבדר לפי מבחן ראבה.

סעיף ד: נביט על סדרת הערכים המוחלטים של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sin n!+\cos n^n)}{n\cdot\sqrt{n}}$$

אז מתקיים

$$\left|\frac{\sin n!+\cos n^n}{n\cdot\sqrt{n}}\right|\le\frac{|\sin(n!)|}{n\cdot\sqrt{n}}+\frac{|\cos n^n|}{n\cdot\sqrt{n}}\le\frac{1+1}{n^{1.5}}=\frac{2}{n^{1.5}}$$

ולכן סדרת הערכים המוחלטים קטנה מסדרה חיובית של טור מתכנס, לכן הטור מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.