המכללה האקדמית נתניה

מבחן באינפי ב׳

שם המרצה: ד״ר גיורא דולה
תאריך הבחינה : 19-6-2011, יום א יז סיון התשע״א
משך הבחינה: שלוש שעות
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. א. נסח **<u>והוכח</u>** את המבחן האינטגרלי להתכנסות טורים חיוביים. (20%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: $\sum_{n=7}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot(\ln(n))^3}$

2. מצא את הגבול הבא: (10%)

$$\lim_{n\to\infty} 7n\left(\frac{1}{9n^2+1^2}+\frac{1}{9n^2+2^2}+\frac{1}{9n^2+3^2}+\cdots+\frac{1}{9n^2+n^2}\right)$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות: (10%)

$f(x)=x^4+6x^2+3$ ו $g(x)=-x^3+8x^2+3$

4. חשב את אורך העקומה $y=\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2x^2}$ בתחום $2\le x\le 3$ (10%)

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: $\int_1^{\infty}\sin(x^2)dx$ נמק. (10%)

רמז: השתמש בהצבה: $t=x^2$

6. ענה על ארבעה מתוך חמשת הסעיפים הבאים. בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק . (40%)

א: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(2n)!}$$

ב: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2}{(\frac{7n^4-3}{2n^3+9})^2}$$

ג: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3)\cdots(\pi+n)}$$

ד: $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(n!)}{n^2}$$

ה. $$\sum_{n=5}^{\infty}\frac{lan(1+\frac{1}{n})}{lan(n)\cdot lan(n+1)}$$

בהצלחה!!!

תשובות

1-ב נביט על : $\sum_{n=7}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot(\ln(n))^3}$ בערך מוחלט, כלומר על

$\sum_{n=7}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln(n))^3}$. כדי לבדוק התכנסות נביט על $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln(x)^3}$. . נשתמש במבחן

האינטגרל, ולכן יש להוכיח כי $\frac{1}{x\ln(x)^3}$ מונוטונית יורדת ושואפת לאפס. עבור 1<x

הפונקציות x,lnx הן חיוביות ועולות, ולכן גם המכפלה $x\ln(x)^3$ חיובית ועולה ולכן

$\frac{1}{x\ln(x)^3}$ חיובית ויורדת וברור ש $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\ln(x)^3}=\frac{1}{\infty^4}=0$. לכן מותר להשתמש

במבחן האינטגרל. כעת נציב $t=\ln(x), dt=\frac{dx}{x}$, ולכן $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln(x)^3}=\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^3}<\infty$, לכן

הטור מתכנס בהחלט.

תשובה 2

$$7n\left(\frac{1}{9n^2+1^2}+\frac{1}{9n^2+2^2}+\frac{1}{9n^2+3^2}+\cdots+\frac{1}{9n^2+n^2}\right)=\frac{7n}{n^2}\left(\frac{1}{9+(1/n)^2}+\frac{1}{9+(2/n)^2}+\cdots+\frac{1}{9+(n/n)^2}\right)=$$

$$=7\frac{1}{n}\left(\frac{1}{9+(1/n)^2}+\frac{1}{9+(2/n)^2}+\cdots+\frac{1}{9+(n/n)^2}\right)=7\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9+(k/n)^2}$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}7n\left(\frac{1}{9n^2+1^2}+\frac{1}{9n^2+2^2}+\frac{1}{9n^2+3^2}+\cdots+\frac{1}{9n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}7\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9+(k/n)^2}=7\int_0^1\frac{dx}{9+x^2}=$$

$$=\frac{7}{3}\arctan(x/3)\Big|_0^1=\frac{7\arctan(1/3)}{3}.$$

תשובה 3

$$f(x)=x^4+6x^2+3=g(x)=-x^3+8x^2+3\to x^4+x^3-2x^2=0\to x^2(x+2)(x-1)=0\to x=-2,0,1$$

נבחר כנציגים את -1,0.5. אז

$$f(-1)=1+6+3=10, g(-1)=-(-1)+8+3=12, f(0.5)=0.5^4+6\cdot0.5^2+3=3+\frac{25}{16},$$

$$g(0.5)=-0.5^3+8\cdot0.5^2+3=3+\frac{7}{8}, f(-1)<g(-1), g(0.5)<f(0.5).$$

ולכן נוכל לחשב את השטח

$$S=\int_{-2}^{0}(g-f)dx+\int_0^1(f-g)dx=\int_{-2}^{0}(2x^2-x^3-x^4)dx+\int_0^1(x^3+x^4-2x^2)dx, F=\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5},$$

$$S=F(0)-F(-2)+F(0)-F(1)=2F(0)-F(-2)-F(1)=0-\left(\frac{-16}{3}-\frac{16}{4}-\frac{-32}{5}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=$$

$$=\frac{14}{3}+\frac{17}{4}-\frac{31}{5}=\frac{280+255-372}{60}=\frac{163}{60}$$

תשובה 4.

$$y=\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2x^2},y'=\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{x^3},(y')^2=\frac{x^6}{16}+\frac{x^{-6}}{1}-\frac{1}{2},(y')^2+1=\frac{x^6}{16}+\frac{x^{-6}}{1}+\frac{1}{2},\sqrt{(y')^2+1}=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{x^3},$$

$$L=\int_2^3(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{x^3})dx,F=\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2x^2},L=F(3)-F(2)=\frac{81}{16}-\frac{16}{16}-\frac{1}{18}+\frac{1}{8}=\frac{729-144-8+18}{144}=\frac{595}{144}.$$

תשובה 5

$$\int_1^\infty\sin(x^2)dx,t=x^2,dt=2xdx,dx=\frac{dt}{2x}=\frac{dt}{2\sqrt{t}},\int_1^\infty\sin(x^2)dx=\int_1^\infty\frac{\sin(t)dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_1^\infty\frac{\sin(t)dt}{\sqrt{t}}$$

האינטגרל הלא אמיתי הזה מתכנס לפי משפט דיריכלה, כיון ש $\frac{1}{\sqrt{t}}$ מונוטונית

יורדת ל-0 וכיון ש $\int_1^u\sin(x)dx=\cos(1)-\cos(u)$ חסומה על ידי 2.

תשובה 6

א:

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{((n+1)!)^2}{(2n)!}\xrightarrow{D'Alambert}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{((n+2)!)^2}{(2n+2)!}/\frac{((n+1)!)^2}{(2n)!}=\frac{(n+2)^2}{(2n+2)(2n+1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{4}<1$$

ב:

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{5n^2}{(\frac{7n^4-3}{2n^3+9})^2},a_n=\frac{5n^2(2n^3+9)^2}{(7n^4-3)^2}=\frac{20n^8+\cdots}{49n^8+\cdots}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{20}{49}\neq0$$

ג:

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{n!}{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3)\cdots(\pi+n)},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3)\cdots(\pi+n)(\pi+n+1)}/\frac{n!}{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3)\cdots(\pi+n)}=\frac{n+1}{\pi+n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}1,$$

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n(\frac{\pi+n+1}{n+1}-1)=\frac{n\pi}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\pi>1$$

לכן מתכנס לפי ראבה.

ד: $\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\frac{\sin(n!)}{n^2}$. נביט על סדרת הערכים המוחלטים.

אז $|(-1)^n\frac{\sin(n!)}{n^2}|\le\frac{|\sin(n!)|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$ ולכן הטור מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

ה.

$$\sum_{n=5}^{\infty}\frac{lan(1+\frac{1}{n})}{lan(n)\cdot lan(n+1)},\frac{lan(1+\frac{1}{n})}{lan(n)\cdot lan(n+1)}=\frac{lan(\frac{n+1}{n})}{lan(n)\cdot lan(n+1)}=\frac{lan(n+1)-\ln(n)}{lan(n)\cdot lan(n+1)}=\frac{1}{\ln(n)}-\frac{1}{\ln(n+1)},$$

$$\sum_{n=5}^{k}\frac{lan(1+\frac{1}{n})}{lan(n)\cdot lan(n+1)}=\sum_{n=5}^{k}(\frac{1}{\ln(n)}-\frac{1}{\ln(n+1)})=\frac{1}{\ln(6)}-\frac{1}{\ln(k+1)}\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{1}{\ln(6)}$$

הטור מתכנס וסכומו $1/\ln(6)$.