

המכללה האקדמית נתניה

מבחן באינפי ב' מועד א'

שם המרצה: גיורא דולה
תאריך הבחינה: יום ג' יב באב התשע"ב 31-7-2012
משך הבחינה: שלוש שעות
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

ענה על כל השאלות הבאות:

1. א. נסח והוכח את מבחן המנה (דלאמבר) להתכנסות טורים חיוביים. (10%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$ (8%)

2. מצא את הגבול הבא: (10%)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{n^2 + 1^2} + \frac{3n}{n^2 + 2^2} + \frac{3n}{n^2 + 3^2} + \dots + \frac{3n}{n^2 + n^2} \right)$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות:
(10%) $f(x) = x^3 - 3x^2$ ו $g(x) = -x^3 + 5x$

4. חשב את אורך הקשת של העקומה $4yx^2 - 2 = \frac{1}{4}x^6$ בתחום: $1 \leq x \leq 4$. (10%)

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: $\int_1^{\infty} x^4 \cdot e^{-x} \cdot \sin(2x) dx$ נמק. (10%)

(32%)

6. בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק.

$$\sum_{n=2}^{\infty} 3^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1})} \quad : \text{א}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(1+\frac{3}{2n})^{n^2}} \quad : \text{ב}$$

$$\sum_{n=5}^{\infty} (\sqrt{n} \cdot \ln n)^{-2} \quad : \text{ג}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^n) \cdot \sin(\frac{1}{n})}{n} \quad : \text{ד}$$

7. הוכח כי אם נתונות שתי חלוקות סופיות T, R של אותו קטע, ונתון כי $R \subset T$ מתקיים עבור סכומי דרבוהעליונים כי $SU(R) \leq SU(T)$ ועבור סכומי דרבו העליונים כי $SL(T) \leq SL(R)$ (10%)

בהצלחה!!!

תשובות 1-ב

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{((n+1)!)^3 (3n)!}{(3(n+1))! (n!)^3} = \frac{(n!(n+1))^3 (3n)!}{((3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)) (n!)^3} = \frac{(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \\ &= \frac{(n+1)^2}{(3n+1)(3n+2)3} = \frac{1}{3} \frac{n^2+2n+1}{9n^2+9n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{1}{9} = \frac{1}{27} < 1 \end{aligned}$$

הטור מתכנס.

-2

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{n^2+1^2} + \frac{3n}{n^2+2^2} + \frac{3n}{n^2+3^2} + \dots + \frac{3n}{n^2+n^2} \right), \frac{3n}{n^2+1^2} + \frac{3n}{n^2+2^2} + \frac{3n}{n^2+3^2} + \dots + \frac{3n}{n^2+n^2} = \\ = \frac{3}{n} \left(\frac{1}{1+(1/n)^2} + \frac{1}{1+(2/n)^2} + \frac{1}{1+(3/n)^2} + \dots + \frac{1}{1+(n/n)^2} \right), \lim_{n \rightarrow \infty} = 3 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \\ = 3(\arctan(1) - \arctan(0)) = 3\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות:

$$g(x) = -x^3 + 5x \quad \vee \quad f(x) = x^3 - 3x^2$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 = g(x) = -x^3 + 5x \rightarrow x^3 - 3x^2 = -x^3 + 5x \rightarrow 2x^3 - 3x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(2x-5)(x+1) = 0,$$

$$x = -1, 0, 5/2, f(1) = -2 < g(1) = 4, f(-0.5) = -\frac{7}{8} > g(-0.5) = -\frac{19}{8}, A = \int_{-1}^0 [(x^3 - 3x^2) - (-x^3 + 5x)] dx$$

$$+ \int_0^{5/2} [(-x^3 + 5x) - (x^3 - 3x^2)] dx = \int_{-1}^0 (2x^3 - 3x^2 - 5x) dx + \int_0^{5/2} (-2x^3 + 3x^2 + 5x) dx. H = 0.5x^4 - x^3 - 2.5x^2,$$

$$A = H(0) - H(-1) - H(2.5) + H(0) = -H(2.5) - H(-1) = -(0.5(5/2)^4 - (5/2)^3 - 2.5(5/2)^2)$$

$$-(0.5(-1)^4 - (-1)^3 - 2.5(-1)^2) = -\frac{625}{32} + \frac{125}{8} + \frac{125}{8} - 0.5 - 1 + 2.5 = \frac{1000 - 625}{32} + 0.5 = \frac{375 + 16}{32} = \frac{391}{32}$$

. -4

$$4yx^2 - 2 = \frac{1}{4}x^6, y = \frac{2 + (x^6/4)}{4x^2} = \frac{1}{2x^2} + \frac{x^4}{16}, y' = -\frac{1}{x^3} + \frac{x^3}{4}, (y')^2 = \frac{1}{x^6} - \frac{1}{2} + \frac{x^4}{16},$$

$$(y')^2 + 1 = \frac{1}{x^6} + \frac{1}{2} + \frac{x^4}{16} = \left(\frac{1}{x^3} + \frac{x^3}{4}\right)^2, l = \int_1^4 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{x^3}{4}\right) dx, H = -\frac{1}{2x^2} + \frac{x^4}{16}, l = H(4) - H(1) =$$

$$= \left(16 - \frac{1}{32}\right) - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{2}\right) = \frac{512 - 1 - 2 + 16}{32} = \frac{525}{32}$$

5. נוכיח כי $x^4 \cdot e^{-x}$ מונוטונית שואפת ל-0 (החל ממקום מסוים). ואכן

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \cdot e^{-x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24}{e^x} = 0$$

$$\text{נוכיח כי } \left(\frac{x^4}{e^x}\right)' = \frac{e^x 4x^3 - e^x x^4}{e^{2x}} = \frac{e^x x^3 (4-x)}{e^{2x}} \text{ והנגזרת שלילית עבור } x < 4. \text{ נוכיח כי}$$

האינטגרל של שאר הפונקציה, בתלות בגבול העליון חסום, ואכן,

$$\int_1^x \sin(2t) dt = \frac{\cos(2 \cdot 1) - \cos(2x)}{2}$$

דיריכלה.

א.6

$$\sum_{n=2}^{\infty} 3^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1})}, a_n = 3^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1})}, a_{n+1} = 3^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})}}{3^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1})}} = 3^{-\frac{1}{n}}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left(3^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \frac{3^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}, \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{0}{0}, \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n^2} \ln(3)}{-\frac{1}{n^2}} = \ln(3) > 1$$

ולכן הטור מתכנס.

$$66. \text{ ולכן הטור } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{2n}}{\left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{n^2}}, \sqrt[n]{a_n} = \frac{9}{\left(1 + \frac{3}{2n}\right)^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{9}{e^{3/2}} = \frac{9}{e^{3/2}} > \frac{9}{e^2} > 1$$

מתבדר

ג.6

$$\sum_{n=5}^{\infty} (\sqrt{n} \cdot \ln n)^{-2}, a_n = (\sqrt{n} \cdot \ln n)^{-2} = \frac{1}{n(\ln n)^2}, \int_5^{\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2} = -\frac{dt}{\ln t} \Big|_5^{\infty} = \frac{1}{\ln 5} - \frac{1}{\ln \infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_5^x \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \frac{1}{\ln 5}$$

ולכן הטור מתכנס.

$$7.6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n^n) \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}, b_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = 1$$

ולכן הטור בהחלט חסום על ידי טור המתכנס לפי מבחן השוואת הגבול, ולכן מתכנס.