המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>מבחן סוף בקורס אינפיב-סמסטר קיץ, מועד א.</u>

יום ב ח תשרי התשע"ז 10-10-2016

- מורה : גיורא דולה.
- משך המבחן שלוש שעות.
- מותר להשתמש במחשבונים לא מדעיים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- יש לנמק את כל החשובים.
- המבחן כולל 8 שאלות.
- שאלות 1 סעיף א, ו9 הן שאלות הוכחה בנות משקל של 10 נקודות כ"א. כל סעיף אחר משקלו 9 נקודות.
- מותר להסתמך על כל מה שהוכח בכיתה אבל יש לנסח את הטענות הללו בנפרד.
- עליך לענות על כל 11 סעיפים שתבחר.

בהצלחה.

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **פקס:** **Tel:** (972-9) 8607777 **טל:**

<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. א. נסח **<u>והוכח</u>** את מבחן רבה איברים להתכנסות טורים חיוביים. (10%)

מותר להסתמך על כל משפט שהוכחנו בכתה אך יש לנסח אותו בנפרד.

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^3\cdot 3^3\cdot 5^3\cdots(2n-1)^3}{2^3\cdot 4^3\cdot 6^3\cdots(2n)^3}$ (9%)

2. מצא את הגבול הבא: (9%)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות: (9%)

$f(x)=5x^2+6x+3$ ו $g(x)=x^3+5x^2+2x+3$

4. פתור שניים משלושת האינגרלים הבאים: (9%) כל סעיף

א. $\int e^{3x}\cdot\sin(4x)dx$

ב. $\int\frac{7}{1-\sin x+2\cos x}dx$

ג. $\int\frac{2x^5+33x^3+4x-27}{x^4+16x^2}dx$

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: $\int_1^\infty \frac{\ln(t)dt}{t^2}$ נמק. (9%)

6. חשב את אורך הקשת של העקומה $y=\sqrt{x}(\frac{x}{3}-1)$ (9%)

בתחום: $1\le x\le 2$.

7. ענה על שניים מתוך שלושת הסעיפים הבאים. (9%) כל סעיף

בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק.

א: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\ln n)^4}{n^2}$

ב: $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln(n))^3}$

ג: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}+3)\cdots(\sqrt{2}+n)}{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3)\cdots(\pi+n)}$

ד:

8. (9%) חשב את $\lim_{x\to\infty}\frac{\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{t}}{\int_{x^4}^{x^3}\frac{dt}{t}}$

9 . הוכח כי אם לפונקציה f קים אינטגרל בקטע [a,b] אז f חסומה בקטע (10%).

מותר להסתמך על כל משפט שהוכחנו בכתה אך יש לנסח אותו בנפרד.

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

סכום של סדרה הנדסית: $q+q^2+...+q^n=q\frac{q^n-1}{q-1}$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. אי-שוויון המשולש: $||x|-|y||\leq|x+y|\leq|x|+|y|$

4. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

5. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y = y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a \sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

6.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

7. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)'=ax^{a-1},\qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x};$$
$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$
$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2};$$

8. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x);$$
$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$
$$(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

9. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|X| + C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C; \int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C; \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C; \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C;$$
$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

10. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

הצבה טריגונומטרית:

$$t = \tan(x/2), \quad x = 2\arctan(t),$$
$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$
$$\cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$\sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2},$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S=\int_a^b (g(x)-f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V=\pi\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$ ו $l=\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\cdot dt$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad \sin^2 x+\cos^2 x=1;$$

$$\tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad \tan x\cdot\cot x=1;$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\qquad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad 1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות :

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

:

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

:

משפט ניוטון-לייבניץ. תהי $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה ל-$f(x)$ בקטע $[a,b]$, **אזי** $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

מבחן ההשוואה.
תהיינה $f(x), g(x)$ פונקציות אינטגרביליות בכל קטע סגור החלקי לקטע $[a,\infty)$. אם $0 \le f(x) \le g(x)$ מתקיים לכל x החל מאיזשהו $b \in [a,\infty)$, אזי

א. אם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אז גם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

ב. אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר אז גם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתבדר.

התכנסות בהחלט. תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע $[a,\infty)$.
אם $f(x)$ אינטגרבילית בכל קטע סגור החלקי לקטע לעיל, ואם
האינטגרל $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס, אז גם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

מבחן ראבה. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי. אם קיים הגבול $q = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. אזי

א. אם $q > 1$ אז הטור מתכנס.
ב. אם $q < 1$ אז הטור מתבדר.
ג. אם $q = 1$ אז אין מספיק מידע.

תשובות

ב-1

$$a_n = \frac{1^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdots (2n-1)^3}{2^3 \cdot 4^3 \cdot 6^3 \cdots (2n)^3}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)^3}{(2n+2)^3} = (\frac{2+1/n}{2+2/n})^3, \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1. n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = n[(\frac{2n+2}{2n+1})^3 - 1] =$$

$$= \frac{(\frac{2n+2}{2n+1})^3 - 1}{1/n}. \lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{3(\frac{2n+2}{2n+1})^2 \frac{2(2n+1) - 2(2n+2)}{(2n+1)^2}}{-1/n^2} = \lim_{n\to\infty} 3(\frac{2n+2}{2n+1})^2 \frac{2n^2}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2}$$

הטור מתכנס לפי מבחן ראבה גבול.

.2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2},\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}=$$

$$=\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{2}{1+(\frac{2}{n})^2}+\frac{3}{1+(\frac{3}{n})^2}+\cdots+\frac{n}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{\frac{2}{n}}{1+(\frac{2}{n})^2}+\frac{\frac{3}{n}}{1+(\frac{3}{n})^2}+\cdots+\frac{\frac{n}{n}}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}=\int_0^1\frac{xdx}{1+x^2}=0.5\ln(1+x^2)\Big|_0^1=0.5(\ln(2)-\ln(1))=0.5\ln(2)$$

3

$$g(x)=x^3+5x^2+2x+3 \quad \text{ו} \quad f(x)=5x^2+6x+3$$

$$g(x)=x^3+5x^2+2x+3=f(x)=5x^2+6x+3\to g-f=x^3-4x=0, x(x-2)(x+2)=0,$$

$$x=0,-2,2,(g-f)(-1)>0,(g-f)(1)<0, A=\int_{-2}^{0}(g-f)dx-\int_0^2(g-f)dx.$$

$$\int(g-f)dx=(1/4)x^4-2x^2=h(x).A=2h(0)-h(-2)-h(2)=$$

$$=-\{[(1/4)16-8]+[(1/4)16-8]\}=-(-4-4)=8$$

.4

.א

$$\int e^{3x}\cdot\sin(4x)dx=I, g=e^{3x}, f'=\sin(4x), g'=3e^{3x}, f=-\frac{\cos(4x)}{4},$$

$$I=-e^{3x}\frac{\cos(4x)}{4}-\int-3e^{3x}\cdot\frac{\cos(4x)}{4}dx=-\frac{e^{3x}\cos(4x)}{4}+\frac{3}{4}\int e^{3x}\cdot\cos(4x)dx=?$$

$$g=e^{3x}, f'=\cos(4x), g'=3e^{3x}, f=\frac{\sin(4x)}{4}, I=-\frac{e^{3x}\cos(4x)}{4}$$

$$+\frac{3}{4}\left(\frac{e^{3x}\sin(4x)}{4}-\frac{3}{4}\int e^{3x}\cdot\sin(4x)dx\right)=-\frac{e^{3x}\cos(4x)}{4}+\frac{3e^{3x}\sin(4x)}{16}-\frac{9}{16}I,$$

$$\frac{25}{16}I=\frac{e^{3x}}{16}(3\sin(4x)-4\cos(4x)), I=\frac{e^{3x}}{25}(3\sin(4x)-4\cos(4x))+C$$

ב.

$$I=\int\frac{7}{1-\sin x+2\cos x}dx,\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2},\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

$$I=\int\frac{7}{1-\frac{2t}{1+t^2}+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2},=\int\frac{14}{1+t^2-2t+2-2t^2}dt=$$

$$=\int\frac{14}{-t^2-2t+3}dt=-\int\frac{14}{(t-1)(t+3)}dt=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+3},$$

$$-14=A(t+3)+B(t-1),-4B=-14,4A=-14,\frac{-14}{(t-1)(t+3)}=\frac{7}{2}(\frac{1}{t+3}-\frac{1}{t-1}),$$

$$I=3.5(\ln|\frac{t+3}{t-1}|)+C=3.5(\ln|\frac{\tan(\frac{x}{2})+3}{\tan(\frac{x}{2})-1}|)+C$$

ג.

$$\int\frac{2x^5+33x^3+4x-27}{x^4+16x^2}dx,\frac{2x^5+33x^3+4x-27}{x^4+16x^2}dx=2x+\frac{x^3+4x-27}{x^4+16x^2}$$

$$\frac{x^3+4x-27}{x^4+16x^2}=\frac{Ax+B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+16},$$

$$-x^3+4x-27=(Ax+B)(x^2+16)+(Cx+D)x^2=(A+C)x^3+(B+D)x^2+16Ax+16B$$

$$16B=-27,16A=4\rightarrow A=\frac{1}{4},B=\frac{-27}{16},D=\frac{27}{16},C=\frac{-5}{4}$$

$$,\frac{2x^5+33x^3+4x-27}{x^4+16x^2}=2x+\frac{4x-27}{16x^2}+\frac{-5x+27}{16(x^2+16)}=2x+\frac{1}{4x}-\frac{27}{16x^2}-\frac{5x}{16(x^2+16)}+\frac{27}{16(x^2+16)}$$

$$I=x^2-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{27}{16x}+\frac{5}{8}\ln(x^2+16)+\frac{27}{64}\arctan(\frac{x}{4})+C$$

.5

דרך נוספת על ידי אי שויון ומבחן ההשואה

$\frac{\ln(t)}{t^2}<\frac{1}{t^{1.5}}\rightarrow\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}<1,L'hospital\rightarrow\frac{1/t}{1/2\sqrt{t}}=\frac{2\sqrt{t}}{t}=\frac{2}{\sqrt{t}},\lim_{t\to\infty}\frac{2}{\sqrt{t}}=0$ כיון שהגבול הוא 0 אז המנה קטנה מ-1 החל מגבול מסוים.

.6

$$y=\sqrt{x}\left(\frac{x}{3}-1\right)=\frac{x^{3/2}}{3}-\sqrt{x}\to y'=\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}},(y')^2=\frac{x}{4}+\frac{1}{4x}-\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{(y')^2+1}=\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}},\int\sqrt{(y')^2+1}dx=\frac{x^{3/2}}{3}+\sqrt{x}=L(x),L(2)-L(1)=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}+\sqrt{2}\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)=$$

$$=\frac{5\sqrt{2}}{3}-\frac{4}{3}\sim 1.04$$

7

א:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\ln n)^4}{n^2},a_n=\frac{(\ln n)^4}{n},b_n=\frac{(-1)^n}{n},(a_n)'=\frac{4(\ln n)^3(1/n)n-(\ln n)^4}{n^2}=\frac{(\ln n)^3[4-(\ln n)]}{n^2}.$$

$$(a_n)'<0\to 4-\ln(n)<0\to 4<\ln(n)\to e^4<n$$

לכן הסדרה a_n יורדת עבור $e^4<n$. נראה מהו גבולה על ידי שמוש בכלל ליהופיטל.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^4}{n}\doteq\lim_{n\to\infty}\frac{4(\ln n)^3(1/n)}{1}=4\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^3}{n}\doteq 12\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^2(1/n)}{1}=12\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^2}{n}=24\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)(1/n)}{1}=$$

$$=24\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=24\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1}=0$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס לפי משפט ליבניץ. לכן לפי מבחן דיריכלה הטור מתכנס.

ב:

הסדרה $\frac{1}{\ln(n)}$ יורדת ושואפת ל-0 וכך גם הסדרה $\frac{1}{n}$ ולכן גם הסדרה $\frac{1}{n\cdot(\ln(n))^3}$
ולכן אפשר להשתמש במבחן האינטגרל ונקבל

$$I=\int_3^{\infty}\frac{dt}{t\cdot(\ln(t))^3}=?,u=\ln(t),du=\frac{dt}{t},I=\int_{\ln(3)}^{\infty}\frac{du}{u^3}=\left.\frac{u^{-2}}{-2}\right|_{\ln(3)}^{\infty}=\frac{1}{2\ln(3)^2}-\frac{1}{\infty}=\frac{1}{2\ln(3)^2}$$

כיון שהאינטגרל מתכנס אז לפי מבחן האינטגרל גם הטור מתכנס.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}+3)\cdots(\sqrt{2}+n)}{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3)\cdots(\pi+n)},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(\sqrt{2}+n+1)}{(\pi+n+1)},\lim_{x\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1,$$

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n\frac{(\pi+n+1)-(\sqrt{2}+n+1)}{(\sqrt{2}+n+1)}=\frac{n(\pi-\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+n+1)},\lim_{x\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\pi-\sqrt{2}\approx$$

$$3.14-1.41=1.73>1$$

הטור מתכנס לפי משפט ראבה גבול.

.8

ג:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{t}}{\int_{x^4}^{x^3}\frac{dt}{t}}=?,\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{t}=\ln(t)\Big|_{x^2}^{x^3}=(\ln(x^3))-\ln(x^2)=3\ln(x)-2\ln(x)=\ln(x),\int_{x^4}^{x^3}\frac{dt}{t}=3\ln(x)-4\ln(x)=-\ln(x),$$

$$\frac{\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{t}}{\int_{x^4}^{x^3}\frac{dt}{t}}=\frac{\ln(x)}{-\ln(x)}=-1$$