המכללה האקדמית נתניה ע״ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף בקורס אינפיב-סמסטר קיץ, מועד א.

יום ג כז תשרי התשע״ח 17-10-2017

- מורה : גיורא דולה. מתרגל רענן שכטר.
- משך המבחן שלוש שעות.
- מותר להשתמש במחשבונים לא מדעיים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- יש לנמק את כל החשובים.
- המבחן כולל 9 שאלות.
- שאלות 1 סעיף א, 8 ו9 הן שאלות הוכחה בנות משקל של 10 נקודות כ״א. כל סעיף אחר משקלו 9 נקודות. סה״כ 111 נקודות. מותר לפתור כל שאלות שרוצים המסתכמות ל100 נקודות.
- מותר להסתמך על כל מה שהוכח בכיתה אבל יש לנסח את הטענות הללו בנפרד.

בהצלחה.

<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. א. נסח **<u>והוכח</u>** את מבחן אבל להתכנסות טורים כלליים. (10%)

מותר להסתמך על כל משפט שהוכחנו בכתה אך יש לנסח אותו בנפרד.

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: $1-1-1+1+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}-\frac{3}{7}+\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{5}-\frac{3}{11}+\frac{1}{3}+\dots$ (9%)

2. מצא את הגבול הבא: (9%)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^3}{n^4+1^4}+\frac{2^3}{n^4+2^4}+\frac{3^3}{n^4+3^4}+\cdots+\frac{n^3}{n^4+n^4}$$

3) (9%) חשב את הנפח המתקבל מסבוב סביב ציר y של השטח החסום על ידי $f(x)=\sin(x), y=0, x=\pi$

4. פתור שניים משלושת האינגרלים הבאים: (9%) כל סעיף

א. $\int e^{\sin(x)}\cdot\sin(2x)dx$

ב. ב-חשב את $\int\frac{5}{1+a\sin x+b\cos x}dx$ 1 תחת ההנחות $a^2+b^2=10, b=-3$.

רמז אפשר לפתור עם פרמטרים כליים ולהציב את a,b רק בסוף.

ג. $\int \frac{2x^5+33x^3+4x-27}{x^4+16x^2}dx$

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא : $\int_1^{\infty} \frac{\arctan(t)\sin(t)dt}{t}$ נמק(9%)

6 . (9%) חשב את אורך הקשת של העקומה $\frac{y}{3}=\frac{(\sqrt[6]{x})^5}{5}-\frac{(\sqrt[6]{x})^7}{7}$

בתחום : $0 \le x \le 1$.

7. ענה על שניים מתוך שלושת הסעיפים הבאים. (9%) כל סעיף

בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק.

א. $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}]^{\gamma 0.5}$

ב : $\sum_{n=20}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln(n)\cdot(\ln(\ln(n)))^2}$

ג : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}+3)\cdots(\sqrt{5}+n)}{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3)\cdots(\pi+n)}$

8(10%) הוכח את משפט השואת המנות לטורים חיוביים.

מותר להסתמך על כל משפט שהוכחנו בכתה אך יש לנסח אותו בנפרד

9 . הוכח כי אם לפונקציה f קים אינטגרל בקטע [a,b] אז f חסומה בקטע (10%)

מותר להסתמך על כל משפט שהוכחנו בכתה אך יש לנסח אותו בנפרד.

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\ \ (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

סכום של סדרה הנדסית: $q+q^2+...+q^n=q\frac{q^n-1}{q-1}$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. אי-שוויון המשולש: $||x|-|y||\le|x+y|\le|x|+|y|$

4. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y}, (ab)^x=a^xb^x, \sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x}, a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy}, a^{-x}=\frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

5. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו $0 < a, a \neq 1$.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a(x / y) = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a \sqrt[y]{x} = \tfrac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828...$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

6.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

7. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2};$$

8. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

9. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|X| + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C; \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C; \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C; \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C;$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

10. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

הצבה טריגונומטרית:

$$t = \tan(x/2), \quad x = 2\arctan(t),$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2},$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S=\int_a^b (g(x)-f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V=\pi\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$ ו $l=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\cdot dt$

11.

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad \sin^2 x+\cos^2 x=1;$$

$$\tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad \tan x\cdot\cot x=1;$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\qquad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad 1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות :

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha)=\frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha)=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha)=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan(\frac{\alpha}{2})=\frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

$$\tan^2(\frac{\alpha}{2})=\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

:

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

משפט ניוטון-לייבניץ. תהי $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה ל-$f(x)$ בקטע $[a,b]$, אזי $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

מבחן ההשוואה.
תהיינה $f(x),g(x)$ פונקציות אינטגרביליות בכל קטע סגור החלקי לקטע $[a,\infty)$. אם $0 \le f(x) \le g(x)$ מתקיים לכל x החל מאיזשהו $b \in [a,\infty)$, אזי

א. אם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אז גם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

ב. אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר אז גם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתבדר.

התכנסות בהחלט. תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע $[a,\infty)$.
אם $f(x)$ אינטגרבילית בכל קטע סגור החלקי לקטע לעיל, ואם האינטגרל $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס, אז גם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

מבחן ראבה. יהי $\sum_{n=1}^\infty a_n$ טור חיובי. אם קיים הגבול $q = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. אזי
א. אם $q>1$ אז הטור מתכנס.
ב. אם $q<1$ אז הטור מתבדר.
ג. אם $q=1$ אז אין מספיק מידע.

תשובות

תשובה 1-ב

$$1-1-1+1+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}-\frac{3}{7}+\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{5}-\frac{3}{11}+\frac{1}{3}+... = \frac{1}{1}-\frac{2}{2}-\frac{3}{3}+\frac{4}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}-\frac{3}{7}+\frac{4}{8}+\frac{1}{9}-\frac{2}{10}-\frac{3}{11}+\frac{4}{12}+....$$

נגדיר $a_n = \frac{1}{n}, b_{4k-3}=1, b_{4k-2}=-2, b_{4k-1}=-3, b_{4k}=4$ אז $a_n = \frac{1}{n}$ יורדת ל-0, וסדרת הסכומים החלקיים T_n של b_n מקיימת $T_{4k-3}=1, T_{4k-2}=-1, T_{4k-1}=-4, T_{4k}=0$ ולכן חסומה, ולכן הטור מקיים את תנאי משפט דיריכלה, ולכן הטור מתכנס לפי משפט דיריכלה.

תשובה 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^3}{n^4+1^4}+\frac{2^3}{n^4+2^4}+\frac{3^3}{n^4+3^4}+\cdots+\frac{n^3}{n^4+n^4}=?,\ \frac{1^3}{n^4+1^4}+\frac{2^3}{n^4+2^4}+\frac{3^3}{n^4+3^4}+\cdots+\frac{n^3}{n^4+n^4}=$$

$$=\frac{1}{n^4}\left(\frac{1^3}{1+(\frac{1}{n})^4}+\frac{2^3}{1+(\frac{2}{n})^4}+\frac{3^3}{1+(\frac{3}{n})^4}+\cdots+\frac{n^3}{1+(\frac{n}{n})^4}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{(\frac{1}{n})^3}{1+(\frac{1}{n})^4}+\frac{(\frac{2}{n})^3}{1+(\frac{2}{n})^4}+\frac{(\frac{3}{n})^3}{1+(\frac{3}{n})^4}+\cdots+\frac{(\frac{n}{n})^3}{1+(\frac{n}{n})^4}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^3}{n^4+1^4}+\frac{2^3}{n^4+2^4}+\frac{3^3}{n^4+3^4}+\cdots+\frac{n}{n^4+n^4}=\int_0^1\frac{x^3dx}{1+x^4}=0.25\ln(1+x^4)\Big|_0^1=$$

$$=0.25(\ln(2)-\ln(1))=0.25\ln(2)$$

תשובה 3

$$V=\int_0^{\pi}2\pi x\sin(x)dx=2\pi\int_0^{\pi}x\sin(x)dx=2\pi([-x\cos(x)]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\cos(x)dx)=2\pi([\sin(x)-x\cos(x)]_0^{\pi})=$$

$$=2\pi([0-(-1)]-[0-0])=2\pi$$

תשובה 4-א

$$\int e^{\sin(x)}\cdot\sin(2x)dx=?,u=\sin(x),du=\cos(x)dx,\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x),$$

$$\int e^{\sin(x)}\cdot\sin(2x)dx=\int e^{u}\cdot 2\sin(x)\cos(x)dx=2\int e^{u}\cdot\sin(x)\cos(x)dx=2\int e^{u}\cdot udu=2e^{u}[u-1]+C=$$

$$=2e^{\sin(x)}[\sin(x)-1]+C$$

פתרון 4-ב-1

$$\int\frac{5}{1+a\sin x+b\cos x}dx=?,t=\tan(\frac{x}{2}),x=2\arctan(t),\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2},\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\int\frac{5}{1+a\sin x+b\cos x}dx=\int\frac{5}{1+a\frac{2t}{1+t^2}+b\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{10dt}{1+t^2+2at+b-bt^2}=$$

$$=10\int\frac{dt}{t^2(1-b)+2at+(b+1)}$$

פתרון 4-ב-2

$$\int \frac{5}{1+a\sin x+b\cos x}dx=10\int \frac{dt}{t^2(1-b)+2at+(b+1)},[t^2(1-b)+2at+(b+1)=0]$$

$$\to t_{1,2}=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2+4(b^2-1)}}{2(1-b)}=\frac{-2a\pm 2\sqrt{a^2+b^2-1}}{2(1-b)}=\frac{-2a\pm 6}{2(1-b)}=\frac{\pm 3-a}{1-b},$$

$$\int \frac{5}{1+a\sin x+b\cos x}dx=10\int \frac{dt}{t^2(1-b)+2at+(b+1)}=10\int \frac{dt}{(1-b)[t-\frac{3-a}{1-b}][t-\frac{-3-a}{1-b}]}=$$

$$=10\int \frac{dt}{((1-b)t+a-3)((1-b)t+a+3)}=10\int \frac{dt}{(4t+a-3)(4t+a+3)}=10\int (\frac{dt}{4t+a-3}-\frac{dt}{4t+a+3})=$$

$$\frac{2.5}{6}[\ln(4t+a-3)-\ln(4t+a+3)]=\ln(\frac{4t+a-3}{4t+a+3})^{\frac{5}{12}}+C$$

פתרון 4-ג

$$\int \frac{2x^5+33x^3+4x-27}{x^4+16x^2}dx,\frac{2x^5+33x^3+4x-27}{x^4+16x^2}=2x+\frac{x^3+4x-27}{x^4+16x^2}$$

$$\frac{x^3+4x-27}{x^4+16x^2}=\frac{Ax+B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+16},$$

$$-x^3+4x-27=(Ax+B)(x^2+16)+(Cx+D)x^2=(A+C)x^3+(B+D)x^2+16Ax+16B$$

$$16B=-27,16A=4\to A=\frac{1}{4},B=\frac{-27}{16},D=\frac{27}{16},C=\frac{-5}{4}$$

$$,\frac{2x^5+33x^3+4x-27}{x^4+16x^2}=2x+\frac{4x-27}{16x^2}+\frac{-5x+27}{16(x^2+16)}=2x+\frac{1}{4x}-\frac{27}{16x^2}-\frac{5x}{16(x^2+16)}+\frac{27}{16(x^2+16)}$$

$$I=x^2-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{27}{16x}+\frac{5}{8}\ln(x^2+16)+\frac{27}{64}\arctan(\frac{x}{4})+C$$

תשובה 5

נסמן $f(t)=\frac{\sin(t)}{t},g(t)=\arctan(t).$ אז עבור $1<t$ $g(t)=\arctan(t).$

עולה ובנוסף היא חסומה על ידי $\frac{\pi}{2}$. בנוסף האינטגרל של

$f(t)=\frac{\sin(t)}{t}=\alpha(t)\beta(t)$ מתכנס כיון ש $\beta(t)=\frac{1}{t}=$ מונוטונית יורדת ל-0

והאינטגרל של $\alpha(t)=\sin(t)$ שוה ל $\cos(t)$ והוא חסום. לכן האינטגרל של

$f(t)=\frac{\sin(t)}{t}$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה לאינטגרלים לא אמיתיים ולכן גם

האינטגרל הלא אמיתי של $\frac{\arctan(t)\sin(t)dt}{t}$ לפי מבחן אבל.

תשובה 6

$$\frac{y}{3}=\frac{(\sqrt[6]{x})^5}{5}-\frac{(\sqrt[6]{x})^7}{7}\rightarrow y'=\frac{x^{\frac{-1}{6}}}{2}-\frac{x^{\frac{1}{6}}}{2},(y')^2=\frac{x^{\frac{-1}{3}}}{4}+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{4}-\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{(y')^2+1}=\frac{x^{\frac{-1}{6}}}{2}+\frac{x^{\frac{1}{6}}}{2},\int\sqrt{(y')^2+1}dx=\frac{(\sqrt[6]{x})^5}{10}+\frac{(\sqrt[6]{x})^7}{14}=L(x),L(1)-L(0)=(\frac{1}{10}+\frac{1}{14})-(0+0)=$$

$$=\frac{7+5}{70}=\frac{12}{70}=\frac{6}{35}$$

תשובה 7-א

$$a_n=[\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}]^{0.5},\frac{a_{n+1}}{a_n}=[\frac{(3n+1)}{(3n+2)}]^{0.5},\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1^{0.5}=1.n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=$$

$$=n[[(\frac{3n+2}{3n+1})]^{0.5}-1]=\frac{(1+\frac{1}{3n+1})^{0.5}-1}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{3n+1}\frac{(1+\frac{1}{3n+1})^{0.5}-1}{\frac{1}{3n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{0.5}-1}{x}=\frac{1}{3}0.5\lim_{x\to 0}(1+x)^{-0.5}=\frac{0.5}{3}=\frac{1}{6}$$

לפי מבחן ראבה הטור מתבדר.

תשובה 7-ב

נשים לב כי שלוש הפונקציות $x,\ln(x),\ln(\ln(x))$ הן חיוביות ועולות בקרניים $x>1,x>e,x>e^e$ בהתאמה ולכן גם מכפלתן חיובית ועולה בקרן $x>e^e$ ולכן הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln(x)\cdot(\ln(\ln(x)))^2}$ חיובית יורדת בקרן $x>e^e$, וברור כי $\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{\infty\cdot\infty\cdot\infty}=\frac{1}{\infty}=0$ לכן אפשר להשתמש במבחן האינטגרל ונקבל כי התכנסות הטור שקולה להתכנסות האינטגרל נציב $u=\ln(\ln(x))$ ונקבל כי $du=\frac{dx}{x\ln(x)}$ ולבסוף $\int_{20}^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln(x)\cdot(\ln(\ln(x)))^2}=\int_{\ln(\ln(20))}^{\infty}\frac{du}{u^2}$ ומכיון שהאינטגרל מתכנס כך גם הטור.

תשובה 7-ג

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}+3)\cdots(\sqrt{5}+n)}{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3)\cdots(\pi+n)},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(\sqrt{5}+n+1)}{(\pi+n+1)},\lim_{x\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1,$$

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n\frac{(\pi+n+1)-(\sqrt{5}+n+1)}{(\sqrt{5}+n+1)}=\frac{n(\pi-\sqrt{5})}{(\sqrt{5}+n+1)},\lim_{x\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\pi-\sqrt{5}\approx$$

$$3.14-2.23\approx 0.89<1$$

הטור מתבדר לפי משפט ראבה גבול.