המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>מבחן סוף בקורס אינפי-סמסטר אביב, מועד ב.</u>

יום ב, יב אלול התשע"ד 7-9-2014

- מורה : גיורא דולה.
- משך המבחן שלוש שעות.
- מותר להשתמש במחשבונים לא מדעיים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- יש לנמק את כל החשובים.
- המבחן כולל 9 שאלות.
- שאלות 1 סעיף א, ו8 הן שאלות הוכחה בנות משקל של 10 נקודות כ"א. כל סעיף אחר משקלו 8 נקודות.

בהצלחה.

<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. א. נסח **<u>והוכח</u>** את המבחן האינטגרלי להתכנסות טורים חיוביים. (10%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln n)^7}$ (8%)

2. חשב את האינטגרל הבא: (8%)

$$\int\frac{x^2-x+12}{x^3+4x}dx$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות:

$f(x)=(x-5)^2$ ו $g(x)=x^3+8x^2+25$

4. חשב את אורך הקשת של העקומה $396y=36x^{11}+\frac{11}{x^9}$ (8%)

בתחום: $1\le x\le 3$.

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: $\int_4^{\infty}\frac{x^{12}}{e^{4x}}\sin(7x)dx$ נמק. (8%)

6. מצא את הגבול הבא: (8%)

$$\lim_{n\to\infty}5\left(\frac{1}{\sqrt{16n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{16n^2-4}}+\frac{1}{\sqrt{16n^2-9}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{16n^2-n^2}}\right)$$

7. בדוק התכנסות ארבעה מתוך חמשת הטורים הבאים. נמק . (32%)

א: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$$

ב: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n}$$

ג: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^3\cdot 3^3\cdot 5^3\cdots(2n-1)^3}{2^3\cdot 4^3\cdot 6^3\cdots(2n)^3}$$

ד: $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(\sin(n!))^{100}}{n^2+7n}$$

ה: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 7^n}{(1+\frac{1}{2n})^{5n^2}}$$

8. הוכח כי אם נתונות שתי חלוקות סופיות T,R של אותו קטע, ונתון כי $R\subset T$ אז מתקיים עבור סכומי דרבו העליונים כי $SU(T)\le SU(R)$ ועבור סכומי דרבו התחתונים כי $SL(R)\le SL(T)$ (10%)

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x,e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)'=ax^{a-1},\qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))' = a\cdot f'(x);$$
$$(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$
$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a\neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x)\pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a}+C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

11.

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות :

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

תשובות

1-ב

לכן כיון ש $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln n)^7},\ f(x)=\frac{1}{x\cdot(\ln x)^7},g(x)=x,0\le g'=1,(0\le g)\leftrightarrow(0\le x)$ g,h

$h(x)=\ln x,0\le h'=\frac{1}{x},(0\le h)\leftrightarrow(1\le x)$

פונקציות חיוביות ועולות, אז גם הפונקציה $x\cdot(\ln x)^7$ חיובית ועולה כמכפלת פונקציות כאלו, ולכן הפונקציה f(x) חיובית ויורדת בתור אחד חלקי פונקציה חיובית ועולה. גם ברור כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. לכן אפשר להסתמך על מבחן האינטגרל והטור מתכנס אם ורק אם האינטגרל מתכנס, ומתקיים.

$$I=\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\cdot(\ln x)^7},t=\ln(x),dt=\frac{dx}{x},I=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{dt}{t^7}=\left.\frac{-1}{6t^6}\right|_{\ln 2}^{\infty}=\frac{1}{6(\ln 2)^6}-\frac{1}{6\infty^6}=\frac{1}{6(\ln 2)^6}.$$

ולכן האינטגרל מתכנס ולכן הטור מתכנס.

2.

$$\frac{x^2-x+12}{x^3+4x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4},x^2-x+12=A(x^2+4)+(Bx+C)x.$$

$$\to 4A=12,A+B=1,C=-1,A=3,B=-2,\frac{x^2-x+12}{x^3+4x}=\frac{3}{x}-\frac{2x+1}{x^2+4}=\frac{3}{x}-\frac{2x}{x^2+4}-\frac{1}{x^2+4}.$$

$$\int\frac{x^2-x+12}{x^3+4x}dx=3\ln|x|-2\ln|x^2+4|-\frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2})+C$$

3

$$f(x)=(x-5)^2=g(x)=x^3+8x^2+25\to g-f=x^3+7x^2+10x=0,x(x+2)(x+5)=0,x=0,-2,-5,$$

$$(g-f)(-1)<0,(g-f)(-3)>0,A=\int_{-5}^{-2}(g-f)dx-\int_{-2}^{0}(g-f)dx.$$

$$\int(g-f)dx=(1/4)x^4+(7/3)x^3+5x^2=h(x).A=2h(-2)-h(-5)-h(0)=$$

$$=2[(1/4)(-2)^4+(7/3)(-2)^3+5(-2)^2]-[(1/4)(-5)^4+(7/3)(-5)^3+5(-5)^2]-0=$$

$$=2\frac{(4\cdot3-56+20\cdot3)}{3}-\frac{(625\cdot3-875\cdot4+125\cdot12)}{12}-0=\frac{32}{3}-\frac{25}{12}(75-140+60)=\frac{32}{3}+\frac{125}{12}=\frac{253}{12}.$$

4. חשב את אורך הקשת של העקומה $396y=36x^{11}+\frac{11}{x^9}$ (8%)

בתחום: $1 \le x \le 3$.

$$396y = 36x^{11} + \frac{11}{x^9} \to y = \frac{x^{11}}{11} + \frac{1}{36x^9} \to y' = -\frac{1}{4x^{10}} + x^{10}, (y')^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{16x^{20}} + x^{20},$$

$$\sqrt{(y')^2+1} = \frac{1}{4x^{10}} + x^{10}, \int \sqrt{(y')^2+1}dx = \frac{x^{11}}{11} - \frac{1}{36x^9} = L(x), L(3)-L(1) = (\frac{177147}{11} - \frac{1}{36\cdot 19683}) -$$

$$-(\frac{1}{11} - \frac{1}{36}) = \frac{177146}{11} + \frac{1}{36}(1 - \frac{1}{19683}) = \frac{177146}{11} + \frac{19682}{36\cdot 19683} = \frac{177146\cdot 36\cdot 19683 + 19682\cdot 11}{36\cdot 19683\cdot 11}$$

5

$$\int_4^\infty \frac{x^{12}}{e^{4x}}\sin(7x)dx = ?,\ f(x) = \frac{x^{12}}{e^{4x}}, g(x) = \sin(7x), \int_a^b \sin(7x)dx =$$

$$= -\frac{\cos(7x)}{7}\Big|_a^b = \frac{\cos(7a) - \cos(7b)}{7}, |\int_a^b \sin(7x)dx| \le \frac{1+1}{7} = \frac{2}{7}. \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{12}}{e^{4x}} \doteq \cdots \doteq \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{4x}} = 0.$$

$$(\frac{x^{12}}{e^{4x}})' = \frac{12x^{11}e^{4x} - 4e^{4x}x^{12}}{e^{8x}} = \frac{4e^{4x}x^{11}(3-x)}{e^{8x}} = \frac{4x^{11}(3-x)}{e^{4x}}.(f'<0) \leftrightarrow (x>3)$$

לכן האינטגרל מתכנס לפי משפט דיריכלה להתכנסות אינטגרלים לא אמיתיים.

6

$$5(\frac{1}{\sqrt{16n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{16n^2-4}} + \frac{1}{\sqrt{16n^2-9}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{16n^2-n^2}}) =$$

$$= 5\frac{1}{n}(\frac{1}{\sqrt{16-1/n^2}} + \frac{1}{\sqrt{16-4/n^2}} + \frac{1}{\sqrt{16-9/n^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{16-1}}).$$

$$\lim_{n\to\infty} 5(\frac{1}{\sqrt{16n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{16n^2-4}} + \frac{1}{\sqrt{16n^2-9}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{16n^2-n^2}}) =$$

$$= 5\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = 5\arcsin(x/4)\Big|_0^1 = 5(\arcsin(0.25) - \arcsin(0)) = 5\arcsin(0.25).$$

7. א

$$a_n = \frac{(n+1)!}{n^n}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+2)}{(n+1)}(\frac{n}{n+1})^n = \frac{(n+2)}{(n+1)}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}. \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1\cdot\frac{1}{e} < 1$$

הטור מתכנס לפי מבחן ד'אלמברט

ב: $a_n = \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n} > \frac{1}{n}$ הטור מתבדר לפי מבחן ההשוואה כיון שהוא גדול מטור מתבדר.

ג.

$$f(x)=\frac{5}{x\cdot\ln^7(2x)},\ f'(x)=-\frac{5(\ln^7(2x)+7\ln^6(2x)(1/x)x}{x^2\cdot\ln^{14}(2x)}=-\frac{\ln^6(2x)(5\ln(2x)+7)}{x^2\cdot\ln^{14}(2x)}=-\frac{(5\ln(2x)+7)}{x^2\cdot\ln^8(2x)},$$

$$(0.5<x)\to(f'(x)<0).\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{5}{\infty}=0.$$

לכן מותר להשתמש במבחן האינטגרל ונקבל

$$\int_5^\infty\frac{5dx}{x\cdot\ln^7(2x)}=?,u=\ln(2x),du=\frac{dx}{x},\int_5^\infty\frac{5dx}{x\cdot\ln^7(2x)}=\int_{\ln(10)}^{\ln(\infty)}\frac{5du}{u^7}=\frac{-1}{6u^6}\Big|_{\ln(10)}^{\infty}=\frac{1}{6(\ln(10))^6}-0$$

כיון שהאינטגרל יצא סופי הטור מתכנס לפי מבחן האינטגרל.

ד:

$$a_n=\frac{1^3\cdot3^3\cdot5^3\cdots(2n-1)^3}{2^3\cdot4^3\cdot6^3\cdots(2n)^3},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+1)^3}{(2n+2)^3}=(\frac{2+1/n}{2+2/n})^3,\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n[(\frac{2n+2}{2n+1})^3-1]=$$

$$=\frac{(\frac{2n+2}{2n+1})^3-1}{1/n}.\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{3(\frac{2n+2}{2n+1})^2\frac{2(2n+1)-2(2n+2)}{(2n+1)^2}}{-1/n^2}=\lim_{n\to\infty}3(\frac{2n+2}{2n+1})^2\frac{2n^2}{(2n+1)^2}=\frac{6}{4}$$

והטור מתכנס לפי מבחן ראבה.

ה: $a_n=(-1)^n\frac{(\sin(n!))^{100}}{n^2+7n},|a_n|\le\frac{1\cdot1^{100}}{n^2+7n}=\frac{1}{n^2+7n}\le\frac{1}{n^2}.$ כיון שטור האיברים בהחלט מתכנס, הטור מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

ה:

: $a_n=\frac{3\cdot7^n}{(1+\frac{1}{2n})^{5n^2}},\sqrt[n]{a_n}=\frac{7\sqrt[n]{3}}{(1+\frac{1}{2n})^{5n}}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{7\cdot1}{e^{5/2}}<1$ הטור מתכנס לפי מבחן השרש של קושי.