המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>מבחן סוף בקורס אינפיב-סמסטר אביב, מועד ב.</u>

יום א, טו אלול התשע"ה 30-8-2015

- מורה : גיורא דולה.
- משך המבחן שלוש שעות.
- מותר להשתמש במחשבונים לא מדעיים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- יש לנמק את כל החשובים.
- המבחן כולל 8 שאלות.
- שאלות 1 סעיף א, ו8 הן שאלות הוכחה בנות משקל של 10 נקודות כ"א. כל סעיף אחר משקלו 8 נקודות.

בהצלחה.

<u>ענה על כל השאלות הבאות :</u>

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **פקס:** **Tel:** (972-9) 8607777 **טל:**

1. א. נסח **<u>והוכח</u>** את משפט לייבניץ. (10%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin(\frac{1}{n})$ (8%)

2. מצא את הגבול הבא: (8%)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות: (8%)

$f(x)=x^3-5x^2+3x-9$ ו $g(x)=-x^2-9$

4. פתור שתיים משלושת האינגרלים הבאים: (8%) כל סעיף

א. $\int e^{2x}\sin\frac{x}{2}dx$

ב. $\int\frac{2}{5\cos x}dx$

ג. $\int\frac{x^2-4x+6}{(x-3)^3}dx$

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: $\int_2^{\infty}\frac{2\sqrt{x}+7}{x^2\ln x}$ נמק. (8%)

6 . חשב את אורך הקשת של העקומה $396y=9x^{11}+\frac{44}{x^9}$ (8%)

בתחום: $1\le x\le 2$.

7. ענה על שלוש מתוך ארבעת הסעיפים הבאים. (8%) כל סעיף

בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק.

א: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n \cdot n!}{n^n}$

ב: $\sum_{n=100}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(n)}$

ג: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdots(n+2)}{n^2\cdot n!}$

ד: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^3\cdot 3^3\cdot 5^3\cdots(2n-1)^3}{2^3\cdot 4^3\cdot 6^3\cdots(2n)^3}$

8. הוכח כי אם לפונקציה f קים אינטגרל בקטע [a,b] אז f חסומה בקטע (10%).

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0 : $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)'=ax^{a-1},\qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$

$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$

$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$.

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$

$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$

$$\int \cos xdx = \sin x + C;$$

$$\int \sin xdx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

11.

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha)=\frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha)=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha)=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2})=\frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2})=\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
:
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
:
$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

תשובות

1-ב לכל n הסדרה n עולה וחיובית ולכן 1/n יורדת וחיובית וגם

$0 \le \frac{1}{n} \le 1 < \frac{\pi}{2}$. הפונקציה sin(x) עולה בתחום $[0, \frac{\pi}{2}]$ ולכן שומרת סדר ולכן

sin(1/n) יורדת וחיובית, והגבול שלה כאשר n שואף לאינסוף הוא

sin(0)=0. לכן מתקיימים תנאי משפט לייבניץ.מתכנס לפי משפט לייבניץ.

.2

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$$

$$n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)=\frac{n}{n^2}\left(\frac{1}{1+(1/n))^2}+\frac{1}{1+(2/n))^2}+\cdots+\frac{1}{1+(n/n))^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)=$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2}=\left.\frac{-1}{1+x}\right|_0^1=\frac{-1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

.3 $f(x)=x^3-5x^2+3x-9$ ו $g(x)=-x^2-9$

$$f(x)=x^3-5x^2+3x-9=g(x)=-x^2-9 \to f-g=x^3-4x^2+3x=0, x(x-3)(x-1)=0,$$

$$x=0,1,3,(f-g)(2)<0,(f-g)(0.5)>0, A=\int_0^1 (f-g)dx-\int_1^3 (f-g)dx.$$

$$\int (f-g)dx = (1/4)x^4-(4/3)x^3+(3/2)x^2=h(x). A=2h(1)-h(0)-h(3)=$$

$$=2\{[(1/4)-(4/3)+(3/2)]-[(1/4)81-(4/3)(27)+(27/2)]\}-0=$$

$$=\frac{2-81}{4}-\frac{8-108}{3}+\frac{6-27}{2}=-\frac{21}{2}+\frac{100}{3}-\frac{79}{4}=\frac{-126+402-237}{12}=.\frac{37}{12}=3\frac{1}{12}=14.75$$

.4 א.

$$\int e^{2x}\sin(\frac{x}{2})dx = I, g = e^{2x}, f' = \sin(\frac{x}{2}), g' = 2e^{2x}, f = -2\cos(\frac{x}{2}),$$

$$I = -2\cos(\frac{x}{2})e^{2x} - \int(-4)\cos(\frac{x}{2})e^{2x}dx = -2\cos(\frac{x}{2})e^{2x} + 4\int e^{2x}\cdot\cos(\frac{x}{2})dx = ?$$

$$g = e^{2x}, f' = \cos(\frac{x}{2}), g' = 2e^{2x}, f = 2\sin(\frac{x}{2}),, I = -2\cos(\frac{x}{2})e^{2x} +$$

$$8\sin(\frac{x}{2})e^{2x} - \int 16e^{2x}\sin(\frac{x}{2})\cdot dx = 2e^{2x}[4\sin(\frac{x}{2}) - \cos(\frac{x}{2})] - 16I$$

$$I = \frac{2e^{2x}[4\sin(\frac{x}{2}) - \cos(\frac{x}{2})]}{17} + C$$

4. ב

$$I = \int\frac{2}{5\cos x}dx, \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$I = \int\frac{2}{5\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \frac{4}{5}\int\frac{1}{1-t^2}dx = ?, \frac{4}{5(1-t)(1+t)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1},$$

$$4 = 5A(t-1) + 5B(t+1), (t=1) \to 10B = 4, (t=-1) \to -10A = 4,$$

$$\frac{4}{5(1-t)(1+t)} = \frac{2}{5}(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}).I = \frac{2}{5}\ln(\frac{t+1}{t-1}) + C = \frac{2}{5}\ln(\frac{\tan(x/2)+1}{\tan(x/2)-1}) + C.$$

4. ג

$$\int\frac{x^2-4x+6}{(x-3)^3}dx = ?\frac{x^2-4x+6}{(x-3)^3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x-3)^3},$$

$$x^2 - 4x + 6 = A(x-3)^2 + B(x-3) + C, (x=3) \to C = 3, (x=0) \to 9A - 3B + C = 6 \to$$

$$9A - 3B = 3 \to 3A - B = 1, A = 1, B = 2$$

$$,\frac{x^2-4x+6}{(x-3)^3} = \frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} + \frac{3}{(x-3)^3}, \int\frac{x^2-4x+6}{(x-3)^3}dx = \ln|x-3| - \frac{2}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^2} + C$$

5.

$$\int_2^\infty \frac{2\sqrt{x}+7}{x^2\ln x}=?,[(7<\sqrt{x})]\leftrightarrow(49<x)].(49<x)\to\frac{2\sqrt{x}+7}{x^2\ln x}<\frac{3\sqrt{x}}{x^2\ln x}=\frac{3}{x^{1.5}\ln(x)}$$

$$(e<x)\to(1<\ln(x))\to(\frac{1}{\ln(x)}<1).(49<x)\to(\frac{2\sqrt{x}+7}{x^2\ln x}<\frac{3\sqrt{x}}{x^2\ln x}=\frac{3}{x^{1.5}\ln(x)}<\frac{3}{x^{1.5}})$$

כיון שהאינטגרנד חיובי וקטן מפונקציה אינטגרבילית, גם האינטגרל הזה מתכנס.

.6

$$396y=9x^{11}+\frac{44}{x^9}\to y=\frac{x^{11}}{44}+\frac{1}{9x^9}\to y'=-\frac{1}{x^{10}}+\frac{x^{10}}{4},(y')^2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^{20}}+\frac{x^{20}}{16},$$

$$\sqrt{(y')^2+1}=\frac{1}{x^{10}}+\frac{x^{10}}{4},\int\sqrt{(y')^2+1}dx=\frac{x^{11}}{44}-\frac{1}{9x^9}=L(x),L(2)-L(1)=(\frac{2048}{44}-\frac{1}{9\cdot 512})-$$

$$-(\frac{1}{44}-\frac{1}{9})=\frac{2047}{44}+\frac{1}{9}(1-\frac{1}{512})=\frac{2047}{44}+\frac{511}{9\cdot 512}$$

.7

א:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\pi^n\cdot n!}{n^n}.a_n=\frac{\pi^n\cdot n!}{n^n},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\pi^{n+1}(n+1)!n^n}{\pi^n n!(n+1)^{n+1}}=\frac{\pi(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\pi\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\pi}{e}>1$$

הטור מתבדר לפי מבחן ד׳אלמברט

ב.

$$\sum_{n=100}^\infty \frac{1}{n\ln^2(n)}=?$$

עבור n>1 הסדרה n חיובית ועולה, עבור n>e ln(x) חיובית ועולה ולכן גם ln(n) חיובית ועולה ולכן $n\ln^2(n)$ חיובית ועולה כמכפלת שלשו סדרות חיוביות ועולות ולכן גם $\frac{1}{n\ln^2(n)}$ חיובית ויורדת. הגבול של n ושל ln(n)

הוא אינסוף ולכן מכפלת הגבולות היא אינסוף ולכן הגבול של $\frac{1}{n\ln^2(n)}$

הוא 0. מתקיימים תנאי מבחן האינטגרל ולכן התכנסות הטור שקולה להתכנסות האינטגרל.

$$I=\int_{100}^{\infty}\frac{1}{x\ln^2(x)}dx=?,u=\ln(x),du=\frac{dx}{x},I=\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}=-\frac{1}{\ln(x)},$$

$$\int_{100}^{\infty}\frac{1}{x\ln^2(x)}dx=-\frac{1}{\ln(x)}\bigg|_{100}^{\infty}=\frac{1}{\ln(100)}-\frac{1}{\ln(\infty)}=\frac{1}{\ln(100)}$$

לכן הטור מתכנס לפי מבחן האינטגרל.

ג.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot4\cdot5\cdots(n+2)}{n^2\cdot n!},a_n=\frac{3\cdot4\cdot5\cdots(n+2)}{n^2\cdot n!}=\frac{(n+2)!}{n^2 2n!}=\frac{(n+1)(n+2)}{n^2 2},\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}\neq0$$

הטור מתבדר כי הגבול של הסדרה איננו 0.

ד.

$$a_n=\frac{1^3\cdot3^3\cdot5^3\cdots(2n-1)^3}{2^3\cdot4^3\cdot6^3\cdots(2n)^3},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+1)^3}{(2n+2)^3}=(\frac{2+1/n}{2+2/n})^3,\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n[(\frac{2n+2}{2n+1})^3-1]=$$

$$=\frac{(\frac{2n+2}{2n+1})^3-1}{1/n}.\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{3(\frac{2n+2}{2n+1})^3\frac{2(2n+1)-2(2n+2)}{(2n+1)^2}}{-1/n^2}=\lim_{n\to\infty}3(\frac{2n+2}{2n+1})^2\frac{2n^2}{(2n+1)^2}=\frac{6}{4}=1.5$$

הטור מתכנס לפי מבחן ראבה.