המכללה האקדמית נתניה

מבחן באינפי ב׳

שם המרצה: גיורא דולה
תאריך הבחינה: כג אלול התשע״ג 29-8-2013
משך הבחינה: שלוש שעות
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. א. נסח <u>**והוכח**</u> את מבחן ראבה להתכנסות טורים חיוביים. (20%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3+1)(3+2)(3+3)\cdots(3+n)}$

2. . חשב את האינטגרל הבא: (10%)

$$\int\frac{-x^2-x+8}{x^3+4x}dx$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=-x^4+3x^3+2x^2$ ו $g(x)=x^3-13x^2$ (10%)

4. חשב את אורך הקשת של העקומה $y=\frac{e^x}{2}+\frac{e^{-x}}{2}$ (10%)
בתחום: $0\le x\le 2$.

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: $\int_1^{\infty}2x^7\cdot e^{-x}\cdot\cos(\frac{3x}{2})dx$ נמק. (10%)

6. בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק . (40%)

א: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\cdot 4^n}$

ב: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{10^n}{(1+\frac{2}{n})^{n^2}}$

ג: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin(\frac{1}{n})$

ד: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-n} \cdot \cos(5n)}{n^2}$

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) הוא $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, a^0 = 1,$$
$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log : $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה : $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו $0 < a, a \neq 1$.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a(x / y) = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a \sqrt[y]{x} = \tfrac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828...$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

6. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח :

$$S=\int_a^b (g(x)-f(x))dx$$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות :

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x :

$$V=\pi\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx$$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y :

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

ה. אורך קו :

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad \sin^2 x+\cos^2 x=1;$$

$$\tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad \tan x\cdot\cot x=1;$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\qquad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad 1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

:

ג. זוויות כפולות וחצויות :

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

:

ד. סכומים והפרשים :

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

:

ה. מכפלות :

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

תשובות

1-ב נתחיל עם מבחן ד'אלמברט

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3+1)(3+2)(3+3)\cdots(3+n)}, a_n=\frac{n!}{(3+1)(3+2)(3+3)\cdots(3+n)}, \frac{a_{n+1}}{a_n}=$$

$$\frac{(n+1)!}{(3+1)(3+2)(3+3)\cdots(3+n)(3+n+1)}\frac{(3+1)(3+2)(3+3)\cdots(3+n)}{n!}=\frac{n+1}{3+n+1}, \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.$$

לכן אי אפשר להחליט על התכנסות והתבדרות לפי מבחן ד'אלמברט. נעבור למבחן ראבה.

$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n(\frac{3+n+1}{n+1}-1)=\frac{3n}{2n+1}, \lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\frac{3}{2}.$ כיון שהגבול גדול מ-1 הטור מתכנס לפי מבחן ראבה.

2. חשב את האינטגרל הבא: $\int\frac{-x^2-x+8}{x^3+4x}dx$ נקבל

$$\frac{-x^2-x+8}{x^3+4x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}\to -x^2-x+8=A(x^2+4)+x(Bx+C).$$

ולכן ,

$$8=4A, A+B=-1, C=-1,\to \frac{-x^2-x+8}{x^3+4x}=\frac{2}{x}+\frac{-3x-1}{x^2+4}$$

$$\int\frac{-x^2-x+8}{x^3+4x}dx=\int(\frac{2}{x}+\frac{-3x-1}{x^2+4})dx=2\ln|x|-\frac{1}{8}\arctan(\frac{x}{2})-\frac{3}{2}\ln(x^2+4)+C$$

.3

. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות:

$f(x)=-x^4+3x^3+2x^2$ ו $g(x)=x^3-13x^2$

$$f(x)=-x^4+3x^3+2x^2, g(x)=x^3-13x^2. f=g\to -x^4+3x^3+2x^2=x^3-13x^2\to x^4-2x^3-15x^2=0\to$$

$$x^2(x-5)(x+3)=0\to x=-3,0,5, g(1)=-12< f(1)=4, g(-1)=-12< f(-1)=-2$$

$$,S=\int_{-5}^{3}(2x^3+15x^2-x^4)dx. h(x)=\frac{x^4}{2}+5x^3-\frac{x^5}{5}, S=h(5)-h(-3)=$$

$$=\frac{625}{2}-(\frac{81}{2}-135+\frac{243}{5})=\frac{625}{2}-\frac{405+486-1350}{10}=\frac{625}{2}+\frac{459}{10}=\frac{3125+459}{10}=\frac{3584}{10}.$$

.

$$y=\frac{e^x}{2}+\frac{e^{-x}}{2}, y'=\frac{e^x}{2}-\frac{e^{-x}}{2}, (y')^2=\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}, (y')^2+1=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}=y^2, l=\int_0^2(\frac{e^x}{2}+\frac{e^{-x}}{2})dx=$$
$$(\frac{e^x}{2}-\frac{e^{-x}}{2})\Big|_0^2=\frac{e^2}{2}-\frac{e^{-2}}{2}-(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})=\frac{e^4-1}{2e^2}$$

5- נפריד את האינטגרנד של האינטגרל הבא $\int_1^\infty 2x^7\cdot e^{-x}\cdot\cos(\frac{3x}{2})dx$

בצורה $f(x)=2x^7\cdot e^{-x}, g(x)=\cos(\frac{3x}{2})$ ונשים לב כי

$14x^6e^{-x}-2x^7e^{-x}=2x^6e^{-x}(7-x)$ כלומר f'<0 בתנאי ש x<7. בנוסף

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^7}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{14x^6}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{84x^5}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{420x^4}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1680x^3}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5040x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10080x}{e^x}=$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{10080}{e^x}=0.$$

ולכן f אכן שואפת ל-0 כאשר x שואף לאינסוף, ולכן מקיימת את הנדרש במבחן דיריכלה. וכמו כן

$$\int_a^b c\,os(\frac{3x}{2})dx=\frac{2\sin(\frac{3x}{2})}{3}\Bigg|_a^b=\frac{2\sin(\frac{3b}{2})-2\sin(\frac{3a}{2})}{3}, \left|\int_a^b c\,os(\frac{3x}{2})dx\right|\le\frac{2+2}{3}=\frac{4}{3}$$

ולכן גם g מקיימת את התנאי שהאינטגרל שלה חסום, ולכן האינטגרל מתכנס לפי משפט דיריכלה.

6 סעיף א נתחיל עם מבחן ד'אלמברט

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{n^n}{n!\cdot 4^n}, a_n=\frac{n^n}{n!\cdot 4^n}, \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\cdot 4^{n+1}}\frac{n!\cdot 4^n}{n^n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{4(n+1)n^n}=\frac{(n+1)^n}{4n^n}=\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{4},$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{4}=\frac{e}{4}<1$$

לכן הטור מתכנס.

6-סעיף ב נביט על מבחן השורש של קושי אז

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{10^n}{(1+\frac{2}{n})^{n^2}}, a_n=\frac{10^n}{(1+\frac{2}{n})^{n^2}}, \sqrt[n]{a_n}=\frac{10}{(1+\frac{2}{n})^n}, \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{(1+\frac{2}{n})^n}=\frac{10}{e^2}>1$$ ולכן

נובע כי הטור מתבדר.

6 סעיף ג נשתמש במבחן השואת הגבול

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin(\frac{1}{n}), a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin(\frac{1}{n}), b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^{1.5}}, \frac{a_n}{b_n}=\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n}}=\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$

לכן שני הטורים מתכנסים ומתבדרים כאחד. כיון שהטור של b_n מתכנס, כך גם הטור המקורי.

6-סעיף ד : נביט על סדרת הערכים המוחלטים של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-n}\cdot\cos(5n)}{n^2}$$ אז מתקיים $$|(-1)^n\frac{e^{-n}\cdot\cos(5n)}{n^2}|=\frac{|\cos(5n)|}{n^2\cdot e^n}\le\frac{1}{n^2\cdot 1}=\frac{1}{n^2}$$

ולכן סדרת הערכים המוחלטים קטנה מסדרה חיובית של טור מתכנס, לכן הטור מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.