המכללה האקדמית נתניה

מבחן באינפי ב' מועד ב'

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה
תאריך הבחינה :
משך הבחינה: שלוש שעות
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. . א. נסח **<u>והוכח</u>** את מבחן ראבה להתכנסות טורים חיוביים. (20%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(e+1)(e+2)(e+3)\cdots(e+n)}$

2. מצא את הגבול הבא: (10%)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^7+2^7+3^7+\cdots+n^7}{n^8}\right)$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות: (10%)

$f(x)=x^3-5x^2+3x$ ו $g(x)=-x^3+3x^2+13x$

4. חשב את אורך העקומה $x=\sqrt{(3y)^{\frac{2}{3}}-2}$ בתחום $1\le x\le 3$ (10%)

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: $\int_1^{\infty}x^4e^{-x}\cos(3x)dx$ נמק.
(10%)

6. ענה על ארבעה מתוך חמשת הסעיפים הבאים. בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק . (40%)

א: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(2n)!}$$

ב: $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+2n-1}{4n^2+7n-3}\right)^n$$

ג: $$\sum_{n=6}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$$

ד: $$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln^3 n}{\sqrt{n}}$$

ה. $$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $\left(a\neq 0\right)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0 : $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)'=ax^{a-1},\qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x);$$
$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$
$$.(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx=C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C;$$
$$\int \cos xdx=\sin x+C;$$
$$\int \sin xdx=-\cos x+C;$$
$$\int e^x dx=e^x+C;$$
$$\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C;$$
$$\int x^a dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C, a\neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin(\frac{x}{a})+C;$$
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x)\pm d(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx=F(x)+C \Rightarrow \int f(ax+b)dx=\frac{F(ax+b)}{a}+C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
:
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
:
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות

1-ב נבדק את התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(e+1)(e+2)(e+3)\cdots(e+n)}$ ע״י שיטת

ד׳אלמברט. אז $a_n=\frac{n!}{(e+1)(e+2)(e+3)\cdots(e+n)}$ ולכן

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(e+1)(e+2)(e+3)\cdots(e+n)(e+n+1)}\frac{(e+1)(e+2)(e+3)\cdots(e+n)}{n!}=\frac{n+1}{e+n+1},\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

ורואים כי ד׳אלמברט נכשל ולכן נמשיך עם שיטת ראבה ונקבל

$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n(\frac{e+n+1}{n+1}-1)=\frac{ne}{n+1},\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=e>1$, ולכן הטור מתכנס

לפי מבחן ראבה.

-2

$$\frac{1^7+2^7+3^7+\cdots+n^7}{n^8}=\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^7+(\frac{2}{n})^7+\cdots+(\frac{2}{n})^7],\lim_{n\to\infty}\frac{1^7+2^7+3^7+\cdots+n^7}{n^8}=\int_0^1 x^7dx=\frac{x^8}{8}\Big|_0^8=\frac{1}{8}$$

-3

$$f(x)=x^3-5x^2+3x,g(x)=-x^3+3x^2+13x.(f=g)\to x^3-5x^2+3x=-x^3+3x^2+13x$$

$$\to 2x^3-8x^2-10x=0\to x^3-4x^2-5x=0,x=-1,0,5.g(-0.5)=0.125+0.75-6.5=-5.625<$$

$$f(-0.5)=-0.125-1.25-1.5=-2.875,\ f(1)=-1<g(1)=15,S=\int_{-1}^{0}(2x^3-8x^2-10x)dx-$$

$$-\int_0^5(2x^3-8x^2-10x)dx,h(x)=\frac{x^4}{2}-\frac{8x^3}{3}-5x^2,S=2h(0)-h(-1)-h(5)=-h(-1)-h(5)=$$

$$=-(\frac{1}{2}+\frac{8}{3}-5)-(\frac{625}{2}-\frac{1000}{3}-125)=\frac{30-16-3}{6}+\frac{750+2000-1875}{6}=\frac{11}{6}+\frac{875}{6}=\frac{886}{6}=\frac{443}{3}$$

ו

-4

$$x=\sqrt{(3y)^{\frac{2}{3}}-2}\to y=\frac{(x^2+2)^{1.5}}{3},y'=\frac{1.5(x^2+2)^{0.5}2x}{3}=x\sqrt{x^2+2},(y')^2=x^4+2x^2,(y')^2+1=(x^2+1)^2,$$

$$l=\int_1^3(x^2+1)dx=(\frac{x^3}{3}+x)\Big|_1^3=\frac{27-1}{3}+2=\frac{32}{3}$$

-5 נפריד את האינטגרנד של האינטגרל הבא $\int_1^{\infty}x^4e^{-x}\cos(3x)dx$

בצורה $f(x)=x^4e^{-x},g(x)=\cos(3x)$ ונשים לב כי

$f\,'(x)=4x^3e^{-x}-x^4e^{-x}=x^3e^{-x}(4-x)$ כלומר f'<0 בתנאי ש x<4. בנוסף
$\lim_{x\to\infty} x^4e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{24}{e^x}=0.$ ולכן f אכן
שואפת ל-0 כאשר x שואף לאינסוף, ולכן מקיימת את הנדרש
במבחן דיריכלה. וכמו כן
$\int_a^b\cos(3x)dx=\frac{\sin(3x)}{3}\Big|_a^b=\frac{\sin(3b)-\sin(3a)}{3},\left|\int_a^b\cos(3x)dx\right|\le\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3}$ ולכן גם g
מקיימת את התנאי שהאינטגרל שלה חסום, ולכן האינטגרל
מתכנס לפי משפט דיריכלה.

6-א.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(2n)!},0\le\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(2n)!}\le\frac{n!+n!+n!+\cdots+n!}{(2n)!}=\frac{n\cdot n!}{(2n)!}\le\frac{(n+1)\cdot n!}{(2n)!}=\frac{(n+1)!}{(2n)!}=$$
$$=\frac{1}{(n+2)\times\cdots\times(2n-1)\times(2n)}\le\frac{1}{(2n-1)\times(2n)}\le\frac{1}{n\times(2n)}=\frac{1}{2n^2}$$

כאשר אי השויון האחרון $n\le 2n-1$ מתקיים עבור כל מספר
טבעי. לכן הסדרה החיובית של הטור קטנה מסדרה של טור
חיובי ומתכנס ולכן הטור מתכנס לפי מבחן ההשואה.

6-ב. בטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+2n-1}{4n^2+7n-3}\right)^n$ נשתמש במבחן השורש של קושי ונקבל
$a_n=\left(\frac{3n^2+2n-1}{4n^2+7n-3}\right)^n,\sqrt[n]{a_n}=\frac{3n^2+2n-1}{4n^2+7n-3},\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{3}{4}$ והטור מתכנס לפי מבחן
קושי.

6-ג. בטור $\sum_{n=6}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$ נשתמש באי השויון $\frac{1}{\sqrt{n}}\le\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$ אשר נכון עבור
$6<n$ ולפי מבחן ההשואה אברי הטור חיוביים וגדולים מאברי
טור חיובי מתבדר ולכן הטור מתבדר.

6-ד. הטור $\sum_{n=10}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln^3 n}{\sqrt{n}}$ הוא טור לייבניץ בעל סימנים מתחלפים
וכדי לודא זאת מספיק לראות כי החל ממקום מסוים $\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}$ יורדת
ל-0. ואכן $\left(\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}\right)'=\frac{\sqrt{n}\,3\ln^2 n\cdot(1/n)-(1/2\sqrt{n})\ln^3 n}{n}=\frac{\ln^2 n(6-\ln n)}{2n\sqrt{n}}$ והנגזרת
שלילית עבור $e^6<n$. כמו כן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3\ln^2 n}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\ln^2 n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{12\ln n}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{24\ln n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{24}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{48}{\sqrt{n}}=0.$$

כדרוש.

6-ה. עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(\frac{n+1}{n})$ נחשב את סדרת הסכומים החלקיים.

מתקיים כי $a_n=\ln(\frac{n+1}{n})=\ln(n+1)-\ln(n)$ ולכן

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)-\ln(k)=\ln(n+1)-\ln(1)=\ln(n+1)$ ולכן

$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(\frac{n+1}{n})=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$ כלומר הטור מתבדר.