המכללה האקדמית נתניה

מבחן באינפי ב' מועד ב

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה
תאריך הבחינה : יום ג כד אלול התשע"ב, 11-9-2012 .

משך הבחינה: שלוש שעות
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. א. <u>נסח **והוכח**</u> את מבחן <u>ראבה</u>. (10%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: (בכל דרך שתבחר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3)\cdots(\pi+n)}$$ (8%)

2. מצא את הגבול הבא: (10%)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left(\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\cos\frac{3\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)$$

3. חשב את אורך העקומה $4x^2y=\frac{1}{2}x^6+1$ בתחום $1\le x\le 3$ (10%)

4. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות: (10%)

$f(x)=x^3+4x^2-2x$ ו $g(x)=-2x^2+5x$

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: $\int_{1}^{\infty}\frac{x^6\cdot\sin(\frac{x}{5})}{e^{2x}}dx$ נמק. (10%)

6. ענה על ארבעת הסעיפים הבאים. בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק . (32%)

א: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$

ב: $\sum_{n=100}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(n)}$

ג: $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{\ln(\sqrt{n})}$

ד: $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n n!}{n^n}$

7. הוכח כי אם נתונות שתי חלוקות סופיות T,R של אותו קטע, ונתון כי R⊂T אז מתקיים עבור סכומי דרבוהעליונים כי SU(T)≤SU(R) ועבור סכומי דרבו התחתונים כי SL(R)≤SL(T) (10%)

בהצלחה!!!

פתרונות

1-ב

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3)\cdots(\pi+n)},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3)\cdots(\pi+n)(\pi+n+1}$$

$$\frac{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3)\cdots(\pi+n)}{n!}=\frac{(n+1)}{(\pi+n+1)},\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1,n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n(\frac{(\pi+n+1)}{(n+1)}-1)=$$

$$=\frac{n\pi}{n+1},\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\pi$$

ולכן הטור מתכנס לפי מבחן ראבה.

2-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}(\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\cos\frac{3\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n})=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)dx=\sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1.$$

3-

$$4x^2y=\frac{1}{2}x^6+2\to y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2},y'=\frac{x^3}{2}-\frac{1}{2x^3},(y')^2=\frac{x^6}{4}+\frac{1}{4x^6}-\frac{1}{2},(y')^2+1=\frac{x^6}{4}+\frac{1}{4x^6}+\frac{1}{2}=$$

$$=(\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2x^3})^2,l=\int_1^3(\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2x^3})dx=(\frac{x^4}{8}-\frac{1}{4x^2})\Big|_1^3=\frac{81-1}{8}-\frac{1}{36}+\frac{1}{4}=10+\frac{2}{9}=\frac{92}{9}.$$

4-

$$f(x)=x^3+4x^2-2x=g(x)=-2x^2+5x\to x^3+6x^2-7x=0\to x(x-1)(x+7)=0,$$

$$f(0.5)=0.125+1-1=0.125,g(0.5)=-0.5+2.5=2,f(0)<g(0),f(-1)=-1+4+2=5$$

$$,g(-1)=-2-5=-7,g(-1)<f(-1),S=\int_{-7}^{0}(x^3+6x^2-7x)dx+\int_0^1(7x-x^3-6x^2)dx,$$

$$H=\frac{x^4}{4}+2x^3-\frac{7x^2}{2},S=H(0)-H(-7)-H(1)+H(0)=-H(-7)-H(1)=$$

$$-(\frac{2401}{4}-686-\frac{343}{2})-(\frac{1}{4}+2-\frac{7}{2})==\frac{686+2744-2401}{4}+\frac{5}{4}=\frac{1029+5}{4}=\frac{1034}{4}=\frac{517}{2}$$

5-

$$\int_1^\infty \frac{x^6\cdot\sin(\frac{x}{5})}{e^{2x}}dx,\ f=\frac{x^6}{e^{2x}},\ g=\sin(\frac{x}{5}),\int_0^x \sin(\frac{t}{5})dt=-5\cos(\frac{t}{5})\Big|_0^x=5\cos(0)-5\cos(x/5),\left|\int_0^x \sin(\frac{t}{5})dt\right|\le 10,$$

$$f'=\frac{6x^5}{e^{2x}}-\frac{2x^6}{e^{2x}}=\frac{2x^5(3-x)}{e^{2x}},(f'<0)\leftrightarrow(3<x),\lim_{x\to\infty}f=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^5}{2e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{30x^4}{4e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{120x^3}{8e^{2x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{360x^2}{16e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{720x}{32e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{720}{64e^{2x}}=0$$

6-א
$$\sum_{n=2}^\infty\frac{3^n n!}{n^n},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{3^n n!}=\frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{3(n)^n}{(n+1)^n},\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{e}>1$$

הטור מתבדר לפי מבחן המנה של ד׳אלמברט

6-ב

$$\sum_{n=100}^\infty\frac{1}{n\ln^2(n)},\int_{100}^\infty\frac{dt}{t[\ln(t)]^2}=I,u=\ln(t),du=\frac{dt}{t},I=\int_{\ln(100)}^\infty\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\ln(100)}=\frac{1}{\ln(100)}$$

הטור מתכנס לפי מבחן האינטגרל

6-ג
$$\sum_{n=5}^\infty\frac{1}{\ln(\sqrt{n})},\ln(x)<x\to\ln(\sqrt{n})<\sqrt{n}<n\to\frac{1}{n}<\frac{1}{\ln(\sqrt{n})}$$

הטור מתבדר לפי מבחן ההשואה.

6-ד

$$\sum_{n=2}^\infty(-1)^n\frac{2^n n!}{n^n},b_n=|a_n|,\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{2^n n!}=\frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{2n^n}{(n+1)^n},\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2}{e}<1$$

הטור ה-b מתכנס לפי מבחן המנה של ד׳אלמברט, ולכן הטור המקורי מתכנס בהחלט.