המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>מבחן סוף בקורס אינפיב-סמסטר קיץ, מועד ב.</u>

יום ד טו חשון התשע"ז 16-11-2016

- מורה : גיורא דולה.
- משך המבחן שלוש שעות.
- מותר להשתמש במחשבונים לא מדעיים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- יש לנמק את כל החשובים.
- המבחן כולל 8 שאלות.
- שאלות 1 סעיף א, ו9 הן שאלות הוכחה בנות משקל של 10 נקודות כ"א. כל סעיף אחר משקלו 9 נקודות.
- מותר להסתמך על כל מה שהוכח בכיתה אבל יש לנסח את הטענות הללו בנפרד.
- עליך לענות על כל 11 שאלות שתבחר

בהצלחה.

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **פקס:** **Tel:** (972-9) 8607777 **טל:**

עׂנה על כל השאלות הבאות :

1. א. נסח **<u>והוכח</u>** את מבחן האינטגרל להתכנסות טורים חיוביים. (10%)

מותר להסתמך על כל משפט שהוכחנו בכתה אך יש לנסח אותו בנפרד.

ב. בדוק התכנסות הטור הבא : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)^5}{n^2}$ (9%)

2. מצא את הגבול הבא : (9%)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^2}{n^3+1^3} + \frac{2^2}{n^3+2^3} + \frac{3^2}{n^3+3^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n^3}$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות : (9%)

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ ו $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 5$

4. פתור שניים משלושת האינגרלים הבאים : (9%) כל סעיף

א. $\int e^{x^2} x^3 dx$

ב. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$

ג. $\int \frac{2x^5 - 10x^3 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2} dx$

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: $\int_1^\infty \frac{\sin(t)dt}{\sqrt[3]{t}}$ נמק. (9%)

6. חשב את אורך הקשת של העקומה $y=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}-1\right)$ (9%)

בתחום: $1\le x\le 2$.

7. ענה על שניים מתוך שלושת הסעיפים הבאים. (8%) כל סעיף

בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק.

א: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\ln n)^4}{n^2}$

ב: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)^{2n}}{(2n^2-1)^n}$

ג: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}k}$

ד:

8. (9%) חשב את $\lim_{x\to\infty}\frac{\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{t^2}}{\int_{x^4}^{x^3}\frac{dt}{t}}$

9 . הוכח את המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי (10%).

מותר להסתמך על כל משפט שהוכחנו בכתה אך יש לנסח אותו בנפרד.

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

סכום של סדרה הנדסית: $q+q^2+...+q^n=q\frac{q^n-1}{q-1}$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. אי-שוויון המשולש: $||x|-|y||\le|x+y|\le|x|+|y|$

4. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

5. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

6.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

7. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)'=ax^{a-1}, \qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x, \qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x, \qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x};$$
$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$
$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2};$$

8. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x);$$
$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$
$$(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

9. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx=C;$$
$$\int\frac{1}{x}dx=\ln|X|+C;$$
$$\int\cos xdx=\sin x+C;\int\sin xdx=-\cos x+C;$$
$$\int e^x dx=e^x+C;\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C;$$
$$\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C, a\neq -1;$$
$$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C;\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C;$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C;$$
$$\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

10. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

הצבה טריגונומטרית:

$$t = \tan(x/2), \quad x = 2\arctan(t),$$
$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$
$$\cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$\sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2},$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$ ו $l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot dt$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

משפט ניוטון-לייבניץ. תהי $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. אם $F(x)$ היא נקציה קדומה ל-$f(x)$ בקטע $[a,b]$, **אזי** $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

מבחן ההשוואה.
תהיינה $f(x),g(x)$ פונקציות אינטגרביליות בכל קטע סגור החלקי לקטע $[a,\infty)$. אם $0\le f(x)\le g(x)$ מתקיים לכל x החל מאיזשהו $b\in[a,\infty)$, אזי

א. אם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אז גם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

ב. אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר אז גם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתבדר.

התכנסות בהחלט. תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע $[a,\infty)$.
אם $f(x)$ אינטגרבילית בכל קטע סגור החלקי לקטע לעיל, ואם
האינטגרל $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס, אז גם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

מבחן ראבה. יהי $\sum_{n=1}^\infty a_n$ טור חיובי. אם קיים הגבול $q=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$. אזי

א. אם $q>1$ אז הטור מתכנס.

ב. אם $q<1$ אז הטור מתבדר.
ג. אם $q=1$ אז אין מספיק מידע.

תשובות

1-ב הערה גזרתי את $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)^{10}}{n^2}$ אבל בתרגיל כתוב $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)^{5}}{n^2}$ והתרגיל האמיתי פשוט יותר

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)^{10}}{n^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)^{10}}{n^2} \doteq \lim_{n\to\infty}\frac{10\ln(n)^9(1/n)}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5\ln(n)^9}{n^2} \doteq \lim_{n\to\infty}\frac{45\ln(n)^8(1/n)}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{45\ln(n)^8}{2n^2} \doteq \lim_{n\to\infty}\frac{360\ln(n)^7(1/n)}{4n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{90\ln(n)^7}{n^2} \doteq \lim_{n\to\infty}\frac{630\ln(n)^6(1/n)}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{315\ln(n)^6}{n^2} \doteq \lim_{n\to\infty}\frac{1890\ln(n)^5(1/n)}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{945\ln(n)^5}{n^2}$$

$$\doteq \lim_{n\to\infty}\frac{4725\ln(n)^4(1/n)}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4725\ln(n)^4}{2n^2} \doteq \lim_{n\to\infty}\frac{4725\cdot 4\ln(n)^3(1/n)}{4n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4725\ln(n)^3}{n^2}$$

$$\doteq \lim_{n\to\infty}\frac{14175\ln(n)^2(1/n)}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{14175\ln(n)^2}{2n^2} \doteq \lim_{n\to\infty}\frac{14175\ln(n)(1/n)}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{14175\ln(n)}{2n^2}$$

$$\doteq \lim_{n\to\infty}\frac{14175(1/n)}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{14175}{2n^2} = 0$$

$$[\frac{\ln(n)^{10}}{n^2}]' = \frac{10n^2\ln(n)^9(1/n) - 2n\ln(n)^{10}}{n^4} = \frac{2n\ln(n)^9(5-\ln(n))}{n^4}.$$

$$[\frac{\ln(n)^{10}}{n^2}]' < 0 \leftrightarrow (5<\ln(n)) \leftrightarrow (e^5<n)$$

הפונקציה שואפת ל-0 ויורדת עבור $e^5<n$, ולכן מותר להשתמש במבחן האינטגרל.

$$I = \int_1^{\infty}\frac{\ln(t)^{10}}{t^2}, g=\ln(t)^{10}, f'=\frac{1}{t^2}, g'=\frac{10\ln(t)^9}{t}, f=-\frac{1}{t}, I=-\frac{\ln(t)^{10}}{t}\Big|_1^{\infty} + 10\int_1^{\infty}\frac{\ln(t)^9}{t^2} =$$

$$= -\frac{\ln(t)^{10}}{t}\Big|_1^{\infty} - \frac{10\ln(t)^9}{t}\Big|_1^{\infty} + 90\int_1^{\infty}\frac{\ln(t)^8}{t^2} = \cdots = -\frac{\ln(t)^{10}}{t}\Big|_1^{\infty} - \frac{10\ln(t)^9}{t}\Big|_1^{\infty} - \cdots - \frac{10!\ln(t)}{t}\Big|_1^{\infty} - \frac{10!}{t}\Big|_1^{\infty}$$

פתרון חלופי ל 1-ב (הרעיון הכללי תקף גם כפתרון חלופי לתרגיל 7-א

נוכיח כי $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)^5}{\sqrt{x}}=0$ ולכן הפונקציה הזו חסומה.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)^5}{\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}\doteq\lim_{x\to\infty}\frac{5\ln(x)^4\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{10\ln(x)^4}{\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}\doteq\lim_{x\to\infty}\frac{40\ln(x)^3\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{80\ln(x)^3}{\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}\doteq$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{240\ln(x)^2\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{480\ln(x)^2}{\sqrt{x}}\doteq\lim_{x\to\infty}\frac{960\ln(x)\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1920\ln(x)}{\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}\doteq$$

$$\doteq\lim_{x\to\infty}\frac{1920\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3840}{\sqrt{x}}=\frac{3840}{\infty}=0$$

ולכן קיים חסם חיובי M לערך המוחלט של הפונקציה הזו כלומר

$|\frac{\ln(x)^5}{\sqrt{x}}|\le M$. ולכן נוכיח התכנסות בהחלט של הטור המקורי.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)^5}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)^5}{\sqrt{n}\sqrt{n^3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)^5}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n^3}},|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)^5}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n^3}}|\le M|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}|$ בערכו המוחלט קטן או שוה מקבוע חיובי כפול טור מתכנס ולכן טור הבהחלט מתכנס.

הצבת אינסוף נותנת 0 בכל הפונקציות, הצבת 1 בכל הפונקציות בהן יש $\frac{1}{t}$ נותנת 0, ורק ההצבה של 1 במחובר האחרון נותנת 10!, ולכן האינטגרל מתכנס ולכן גם הטור.

.2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2}{n^3+1^3}+\frac{2^2}{n^3+2^3}+\frac{3^2}{n^3+3^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^3}\ \frac{1^2}{n^3+1^3}+\frac{2^2}{n^3+2^3}+\frac{3^2}{n^3+3^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^3}=$$

$$\frac{1}{n^3}\left(\frac{1^2}{1+(\frac{1}{n})^3}+\frac{2^2}{1+(\frac{2}{n})^3}+\frac{3^2}{1+(\frac{3}{n})^3}+\cdots+\frac{n^2}{1+(\frac{n}{n})^3}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{(\frac{1}{n})^2}{1+(\frac{1}{n})^3}+\frac{(\frac{2}{n})^2}{1+(\frac{2}{n})^3}+\frac{(\frac{3}{n})^2}{1+(\frac{3}{n})^3}+\cdots+\frac{(\frac{n}{n})^2}{1+(\frac{n}{n})^3}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2}{n^3+1^3}+\frac{2^2}{n^3+2^3}+\frac{3^2}{n^3+3^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^3}=\int_0^1\frac{x^2dx}{1+x^3}=\frac{\ln(1+x^2)}{3}\bigg|_0^1=\frac{\ln(2)-\ln(1)}{3}=\frac{\ln(2)}{3}$$

3

$$g(x)=2x^3+3x^2+x+5 \quad \text{ו} \quad f(x)=x^3+2x^2+3x+5$$

$$g(x)=2x^3+3x^2+x+5=f(x)=x^3+2x^2+3x+5\rightarrow g-f=x^3+x^2-2x=0,x(x-1)(x+2)=0,$$
$$x=0,-2,1,(g-f)(-1)>0,(g-f)(0.5)<0,A=\int_{-2}^{0}(g-f)dx-\int_0^1(g-f)dx.$$
$$\int(g-f)dx=(1/4)x^4+(1/3)x^3-x^2=h(x).A=2h(0)-h(-2)-h(1)=$$
$$=-\{[(1/4)16-8/3-4]+[(1/4)+(1/3)-1]\}=8/3+5/12=37/12.$$

.4

.א

$$I=\int e^{x^2}x^3dx,u=x^2,du=2xdx,I=\int e^{x^2}x^3dx=\int x^2e^{x^2}xdx=\int ue^u du/2$$
$$\int ue^u du,\ f=u,g'=e^u=g,\ f'=1,\int ue^u du=ue^u-\int e^u du=ue^u-e^u+C$$
$$I=\int e^{x^2}x^3dx=\frac{x^2e^{x^2}-e^{x^2}}{2}+C$$

.ב

$$I=\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x},\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2},\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$
$$I=\int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2},=\int\frac{2}{1+t^2+2t+1-t^2}dt=$$
$$=\int\frac{2}{2t+2}dt=\int\frac{1}{t+1}dt=\ln|t+1|+C=\ln|\tan(\frac{x}{2})+1|+C$$

ג.

$$\int \frac{2x^5-10x^3+4x+5}{x^3+2x^2}dx, \frac{2x^5-10x^3+4x+5}{x^3+2x^2} = 2x^2-4x-2+\frac{-4x^2+4x+5}{x^3+2x^2}$$

$$\frac{-4x^2+4x+5}{x^3+2x^2} = \frac{Ax+B}{x^2}+\frac{C}{x+2},$$

$$-4x^2+4x+5=(Ax+B)(x+2)+Cx^2=(A+C)x^2+(2A+B)x+2B$$

$$2B=5, 2A+B=4 \to B=\frac{5}{2}, A=\frac{3}{4}, C=\frac{-19}{4}$$

$$,\frac{2x^5-10x^3+4x+5}{x^3+2x^2} = 2x^2-4x-2+\frac{3x+10}{4x^2}-\frac{19}{4(x+2)} =$$

$$= 2x^2-4x-2+\frac{3}{4x}+\frac{5}{2x^2}-\frac{19}{4(x+2)}$$

$$I=\frac{2x^3}{3}-x^2-2x+\frac{3}{4}\ln|x|-\frac{5}{2x}-\frac{19}{4}\ln|x+2|+C$$

.5

$$\int_1^\infty \frac{\sin(t)dt}{\sqrt[3]{t}}, \int_a^b \sin(t)dt = \cos a-\cos b, |\cos b-\cos a| \le 2<\infty, (\frac{1}{\sqrt[3]{t}})' = -\frac{1}{3(\sqrt[3]{t})^5}<0, (\frac{1}{\sqrt[3]{t}}) \downarrow$$

והטור מתכנס לפי מבחן אבל לאינטגרלים אינסופיים בתור מכפלת
פונקציה בעלת אינטגרל מתכנס כפול פונקציה יורדת.

.6

$$y=y=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}-1)=\frac{3x^{4/3}}{8}-\frac{3x^{2/3}}{4} \to y'=\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}, (y')^2=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\frac{1}{4\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{(y')^2+1}=\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}, \int\sqrt{(y')^2+1}dx=\frac{3x^{4/3}}{8}+\frac{3x^{2/3}}{4}=L(x), L(1)-L(0)=(\frac{3}{8}+\frac{3}{4}-0)=\frac{9}{8}$$

7

א:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\ln n)^4}{n^{1.5}}, a_n=\frac{(\ln n)^4}{n}, b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, (a_n)'=\frac{4(\ln n)^3(1/n)n-(\ln n)^4}{n^2}=\frac{(\ln n)^3[4-(\ln n)]}{n^2}.$$

$$(a_n)'<0\to 4-\ln(n)<0\to 4<\ln(n)\to e^4<n$$

לכן הסדרה a_n יורדת עבור $e^4<n$. נראה מהו גבולה על ידי שמוש בכלל ל'הופיטל.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^4}{n}\doteq\lim_{n\to\infty}\frac{4(\ln n)^3(1/n)}{1}=4\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^3}{n}\doteq 12\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^2(1/n)}{1}=12\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^2}{n}=24\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)(1/n)}{1}=$$

$$=24\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=24\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1}=0$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ מתכנס לפי משפט ליבניץ. לכן הטור מתכנס לפי משפט דיריכלה.

ב:

, $a=\frac{(n+1)^{2n}}{(2n^2-1)^n}$ נפעיל את מבחן השורש של קושי ונקבל

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{(n+1)^{2n}}{(2n^2-1)^n}}=\frac{(n+1)^2}{2n^2-1}=\frac{n^2+2n+1}{2n^2-1}, \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}.$$ הטור מתכנס לפי מבחן קושי.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}k}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n(n-1)/2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n-1}$$ הטור ידוע כמתבדר

.8

ג:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{t^2}}{\int_{x^4}^{x^3}\frac{dt}{t}}=?,\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{t^2}=\ln(t)\Big|_{x^2}^{x^3}=(\ln(x^3))-\ln(x^2)=3\ln(x)-2\ln(x)=\ln(x),\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{t^2}=\frac{-1}{t}\Bigg|_{x^2}^{x^3}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3},$$

$$\int_{x^4}^{x^3}\frac{dt}{t}=\ln(t)\Big|_{x^4}^{x^3}=3\ln(x)-4\ln(x)=-\ln(x)$$

$$\frac{\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{t^2}}{\int_{x^4}^{x^3}\frac{dt}{t}}=\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{-\ln(x)}=\frac{1-\frac{1}{x}}{-x^2\ln(x)},\lim_{x\to\infty}x^2\ln(x)=\infty,\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{x\ln(x)}=\frac{1}{\infty}=0$$