**המכללה האקדמית נתניה ע״ר**
**רח' האוניברסיטה 1**
**קרית יצחק רבין**
**נתניה 42365**

**NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)**
**1 University St.**
**Kiryat Yitzhak Rabin**
**NETANYA 42365, ISRAEL**

**<u>מבחן סוף בקורס אינפיב-סמסטר קיץ, מועד ב.</u>**

יום ד ד כסלו התשע״ח 22-11-2017

- מורה : גיורא דולה.
- משך המבחן שלוש שעות.
- מותר להשתמש במחשבונים לא מדעיים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- יש לנמק את כל החשובים.
- המבחן כולל 9 שאלות.
- שאלות 1 סעיף א, 8 ו 9 הן שאלות הוכחה בנות משקל של 10 נקודות כ״. כל סעיף אחר משקלו 9 נקודות. סה״כ 111 נקודות. מותר לפתור כל שאלות שרוצים המסתכמות ל100 נקודות.
- מותר להסתמך על כל מה שהוכח בכיתה אבל יש לנסח את הטענות הללו בנפרד.

**בהצלחה.**

<u>ענה על כל השאלות הבאות :</u>

עמותה רשומה 580242451 **טל:** (972-9) 8607777 **Tel:** **פקס:** (972-9) 8844439 **Fax:**

1. א. נסח **והוכח** את מבחן אבל להתכנסות טורים כלליים. (10%)

מותר להסתמך על כל משפט שהוכחנו בכתה אך יש לנסח אותו בנפרד.

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: (9%)

$$1-1-1+1+\frac{1}{9}-\frac{3}{11}-\frac{5}{13}+\frac{7}{15}+\frac{1}{17}-\frac{3}{19}-\frac{5}{21}+\frac{7}{23}+\dots$$

2. מצא את הגבול הבא: (9%)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^4}{n^5+1^5}+\frac{2^4}{n^5+2^5}+\frac{3^4}{n^5+3^5}+\cdots+\frac{n^4}{n^5+n^5}$$

3)(9%) חשב את הנפח המתקבל מסבוב סביב ציר $y$ של השטח החסום על ידי $f(x)=\cos(x), y=1, x=\pi$

4. פתור שניים משלושת האינגרלים הבאים: (9%) כל סעיף מי שיענה על שלשה סעיפים יחושב לו 66% מהציון הכולל שיצבור

א. $\int e^{\cos(x)}\cdot\sin(2x)dx$

ב. $\int\frac{2x^5-30x^3+4x-27}{x^4-16x^2}dx$

ג. -חשב את $\int\frac{1}{\sqrt{3-4x-4x^2}}dx$ 1 . רמז אפשר להציג את הבטוי בשורש כהפרש של שני רבועים.

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: $\int_1^\infty\frac{\operatorname{arc}\cot(t)\cos(t)dt}{t}$ נמק. (9%)

6 (9%) חשב את אורך הקשת של העקומה $\frac{y}{2}=\frac{(\sqrt[4]{x})^3}{3}-\frac{(\sqrt[4]{x})^5}{5}$

בתחום: $0\le x\le 1$ .

7. ענה על שניים מתוך שלושת הסעיפים הבאים. (9%) כל סעיף מי שיענה על שלשה סעיפים יחושב לו 66% מהציון הכולל שיצבור

בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק.

א. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}\right]^{\gamma 1.5}$$

ב: $$\sum_{n=20}^{\infty}\frac{\ln(\ln(n))}{n\cdot\ln(n)\cdot[(\ln(\ln(n)))^2+1]}$$

ג: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}+3)\cdots(\sqrt{5}+n)}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}+3)\cdots(\sqrt{6}+n)}$$

8 (10%) הוכח את משפט השואת הגבול לטורים חיוביים.

מותר להסתמך על כל משפט שהוכחנו בכתה אך יש לנסח אותו בנפרד

9 . (10%) . הוכח כי אם נתונות שתי חלוקות סופיות T,R של אותו קטע, ונתון כי $R\subset T$ אז מתקיים עבור סכומי דרבו העליונים כי $SU(T)\le SU(R)$ ועבור סכומי דרבו התחתונים כי $SL(R)\le SL(T)$

מותר להסתמך על כל משפט שהוכחנו בכתה אך יש לנסח אותו בנפרד.

בהצלחה!!!

# דף נוסחאות

## 1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

סכום של סדרה הנדסית: $q+q^2+...+q^n=q\frac{q^n-1}{q-1}$

## 2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $\left(a\neq 0\right)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

## 3. אי-שוויון המשולש: $||x|-|y||\leq|x+y|\leq|x|+|y|$

## 4. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

## 5. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

## 6.הגדרת נגזרת הפונקציה $f$ בנקודה $x_0$: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

## 7. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$
$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x;$$
$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

## 8. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$
$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$
$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

## 9. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|X| + C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C; \int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C; \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C; \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - (bx)^2}} dx = \arcsin \frac{bx}{a} + C;$$
$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

## 10. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

הצבה טריגונומטרית:

$$t = \tan(x/2), \quad x = 2\arctan(t),$$
$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$
$$\cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$\sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2},$$

## 10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$ ו $l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot dt$

## 11.

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

$\pi$ רדיאן שווים ל- 180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

### ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

### ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

### ד. סכומים והפרשים:

:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

**משפט ניוטון-לייבניץ.** תהי $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה ל-$f(x)$ בקטע $[a,b]$, אזי $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

**מבחן ההשוואה.**
תהיינה $f(x),g(x)$ פונקציות אינטגרביליות בכל קטע סגור החלקי לקטע $[a,\infty)$. אם $0\le f(x)\le g(x)$ מתקיים לכל $x$ החל מאיזשהו $b\in[a,\infty)$, אזי

א. אם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אז גם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

ב. אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר אז גם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתבדר.

**התכנסות בהחלט.** תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע $[a,\infty)$.
אם $f(x)$ אינטגרבילית בכל קטע סגור החלקי לקטע לעיל, ואם האינטגרל $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס, אז גם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

**מבחן ראבה.** יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור חיובי. אם קיים הגבול $q=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$. אזי

א. אם $q>1$ אז הטור מתכנס.
ב. אם $q<1$ אז הטור מתבדר.
ג. אם $q=1$ אז אין מספיק מידע.

# תשובות

## תשובה 1-ב

$$1-1-1+1+\frac{1}{9}-\frac{3}{11}-\frac{5}{13}+\frac{5}{15}+\frac{1}{17}-\frac{3}{19}-\frac{5}{21}+\frac{7}{23}+\ldots=\frac{1}{1}-\frac{3}{3}-\frac{5}{5}+\frac{7}{7}+\frac{1}{9}-\frac{3}{11}-\frac{5}{13}+\frac{5}{15}+$$
$$+\frac{1}{17}-\frac{3}{19}-\frac{5}{21}+\frac{7}{23}+\ldots.$$

נגדיר $a_n=\frac{1}{2n-1}, b_{4k-3}=1, b_{4k-2}=-3, b_{4k-1}=-5, b_{4k}=7$ אז $a_n=\frac{1}{2n-1}$ יורדת ל-0,
וסדרת הסכומים החלקיים $T_n$ של $b_n$ מקיימת
$T_{4k-3}=1, T_{4k-2}=-2, T_{4k-1}=-7, T_{4k}=0$ ולכן חסומה, ולכן הטור מקיים את תנאי
משפט דיריכלה, ולכן הטור מתכנס לפי משפט דיריכלה.

## תשובה 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^4}{n^5+1^5}+\frac{2^4}{n^5+2^5}+\frac{3^4}{n^5+3^5}+\cdots+\frac{n^4}{n^5+n^5}=?,\quad \frac{1^4}{n^5+1^5}+\frac{2^4}{n^5+2^5}+\frac{3^4}{n^5+3^5}+\cdots+\frac{n^4}{n^5+n^5}=$$

$$=\frac{1}{n^5}\left(\frac{1^4}{1+(\frac{1}{n})^5}+\frac{2^4}{1+(\frac{2}{n})^5}+\frac{3^4}{1+(\frac{3}{n})^5}+\cdots+\frac{n^4}{1+(\frac{n}{n})^5}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{(\frac{1}{n})^4}{1+(\frac{1}{n})^5}+\frac{(\frac{2}{n})^4}{1+(\frac{2}{n})^5}+\frac{(\frac{3}{n})^4}{1+(\frac{3}{n})^5}+\cdots+\frac{(\frac{n}{n})^4}{1+(\frac{n}{n})^5}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^4}{n^5+1^5}+\frac{2^4}{n^5+2^5}+\frac{3^4}{n^5+3^5}+\cdots+\frac{n^4}{n^5+n^5}=\int_0^1\frac{x^4dx}{1+x^5}=0.2\ln(1+x^5)\Big|_0^1=$$

$$=0.2(\ln(2)-\ln(1))=0.2\ln(2)$$

## תשובה 3

$$V=\int_0^\pi 2\pi x(1-\cos(x))dx=2\pi\int_0^\pi xdx-2\pi\int_0^\pi x\cos(x)dx=2\pi([\frac{x^2}{2}+x\sin(x)]_0^\pi+\int_0^\pi\sin(x)dx)=$$

$$=2\pi([\frac{x^2}{2}+x\sin(x)-\cos(x)]_0^\pi=2\pi([\frac{\pi^2}{2}+0-(-1)]-[0+0-1])=2\pi(\frac{\pi^2}{2}-2)=\pi(\pi^2-4)$$

## תשובה 4-א

$$\int e^{\cos(x)}\cdot\sin(2x)dx=?, u=\cos(x), du=-\sin(x)dx, \sin(2x)=2\sin(x)\cos(x),$$

$$\int e^{\cos(x)}\cdot\sin(2x)dx=\int e^u\cdot 2\sin(x)\cos(x)dx=2\int e^u\cdot\sin(x)\cos(x)dx=-2\int e^u\cdot udu=-2e^u[u-1]+C=$$

$$=-2e^{\cos(x)}[\cos(x)-1]+C$$

## פתרון 4-ב-

$$I=\int\frac{2x^5-30x^3+4x-27}{x^4-16x^2}dx,\ \frac{2x^5-30x^3+4x-27}{x^4-16x^2}dx=2x+\frac{2x^3+4x-27}{x^4-16x^2}$$

$$\frac{2x^3+4x-27}{x^4-16x^2}=\frac{Ax+B}{x^2}+\frac{C}{x-4}+\frac{D}{x+4},$$

$$2x^3+4x-27=(Ax+B)(x^2-16)+C(x+4)x^2+D(x-4)x^2=$$

$$=(A+C+D)x^3+(B+4C-4D)x^2-16Ax-16B$$

$$16B=27,16A=-4\to A=-\frac{1}{4},B=\frac{27}{16},D=\frac{43}{128},C=\frac{-11}{128},$$

$$,\frac{2x^5-30x^3+4x-27}{x^4-16x^2}=2x+\frac{-4x+27}{16x^2}-\frac{11}{128(x-4)}+\frac{43}{128(x+4)}=$$

$$=2x-\frac{1}{4x}+\frac{27}{16x^2}-\frac{11}{128(x-4)}+\frac{43}{128(x+4)}$$

$$I=x^2-\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{27}{16x}-\frac{11}{128}\ln|x-4|+\frac{43}{128}\ln|x+4|+C$$

פתרון 4-ג

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{3-4x-4x^2}}=?,3-4x-4x^2=1+3-4x-4x^2-1=4-(2x+1)^2,I=\int\frac{dx}{\sqrt{4-(2x+1)^2}},$$

$$u=2x+1,du=2dx,I=\int\frac{du/2}{\sqrt{4-u^2}}=\frac{1}{2}\arcsin(\frac{u}{2})+C=\frac{1}{2}\arcsin(\frac{2x+1}{2})+C$$

תשובה 5

נסמן $f(t)=\frac{\cos(t)}{t},g(t)=arc\cot(t).$ אז עבור $1<t$ $g(t)=arc\cot(t).$
יורדת ובנוסף היא חסומה על ידי $-\frac{\pi}{2}$. בנוסף האינטגרל של
$f(t)=\frac{\cos(t)}{t}=\alpha(t)\beta(t)$ מתכנס כיון ש $\beta(t)=\frac{1}{t}=$ מונוטונית יורדת ל-0
והאינטגרל של $\alpha(t)=\cos(t)$ שוה ל $-\sin(t)$ והוא חסום. לכן האינטגרל של
$f(t)=\frac{\cos(t)}{t}$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה לאינטגרלים לא אמיתיים ולכן גם
האינטגרל הלא אמיתי של $\frac{\operatorname{arc}\cot(t)\cos(t)dt}{t}$ לפי מבחן אבל.

## תשובה 6

$$\frac{y}{2}=\frac{(\sqrt[4]{x})^3}{3}-\frac{(\sqrt[4]{x})^5}{5}\rightarrow y'=\frac{x^{\frac{-1}{4}}}{2}-\frac{x^{\frac{1}{4}}}{2},(y')^2=\frac{x^{\frac{-1}{2}}}{4}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{4}-\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{(y')^2+1}=\frac{x^{\frac{-1}{4}}}{2}+\frac{x^{\frac{1}{4}}}{2},\int\sqrt{(y')^2+1}dx=2[\frac{(\sqrt[4]{x})^3}{3}+\frac{(\sqrt[4]{x})^5}{5}]=L(x),L(1)-L(0)=2[(\frac{1}{3}+\frac{1}{5})-(0+0)]=$$

$$=\frac{2[5+3]}{15}=\frac{16}{15}$$

## תשובה 7-א

$$a_n=[\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}]^{1.5},\frac{a_{n+1}}{a_n}=[\frac{(3n+1)}{(3n+2)}]^{1.5},\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1^{1.5}=1.n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=$$

$$=n[[(\frac{3n+2}{3n+1})]^{1.5}-1]=\frac{(1+\frac{1}{3n+1})^{1.5}-1}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{3n+1}\frac{(1+\frac{1}{3n+1})^{1.5}-1}{\frac{1}{3n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1.5}-1}{x}=\frac{1}{3}1.5\lim_{x\to 0}(1+x)^{0.5}=\frac{1.5}{3}=\frac{1}{2}$$

לפי מבחן ראבה הטור מתבדר.

## תשובה 7-ב

נשים לב כי שלוש הפונקציות $x,\ln(x),\ln(\ln(x))$ הן חיוביות ועולות בקרניים $x>1,x>e,x>e^e$ בהתאמה כמו כן $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$ יורדת בקטע $x>1$ ולכן גם $\frac{\ln(\ln(x))}{(\ln(\ln(x)))^2+1}$ יורדת בקטע $x>1$ ו $x\cdot\ln(x)$ עולה וחיובית באותו קטע ולכן $\frac{1}{x\cdot\ln(x)}$ חיובית ויורדת בקרן $x>e^e$ ולכן הפונקציה $f(x)=\frac{\ln(\ln(x))}{x\cdot\ln(x)\cdot[(\ln(\ln(x)))^2+1]}$ חיובית יורדת בקרן $x>e^e$, וברור כי $\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{\infty\cdot\infty\cdot\infty}=\frac{1}{\infty}=0$ לכן אפשר להשתמש במבחן האינטגרל ונקבל כי התכנסות הטור שקולה להתכנסות האינטגרל נציב $u=\ln(\ln(x))$ ונקבל כי $du=\frac{dx}{x\ln(x)}$ ולבסוף

$$\int_{20}^{\infty}\frac{\ln(\ln(x))dx}{x\cdot\ln(x)\cdot[(\ln(\ln(x)))^2+1]}=\int_{\ln(\ln(20))}^{\infty}\frac{udu}{u^2+1}=\frac{\ln(u^2+1)}{2}\Big|_{\ln(\ln(20))}^{\infty}=\frac{\ln(\infty^2+1)}{2}-\frac{\ln((\ln(\ln(20))^2+1)}{2}=\infty$$

ומכיון שהאינטגרל מתבדר כך גם הטור.

תשובה 7-ג

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}+3)\cdots(\sqrt{5}+n)}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}+3)\cdots(\sqrt{6}+n)},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(\sqrt{5}+n+1)}{(\sqrt{6}+n+1)},\lim_{x\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1,$$

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n\frac{(\sqrt{6}+n+1)-(\sqrt{5}+n+1)}{(\sqrt{5}+n+1)}=\frac{n(\sqrt{6}-\sqrt{5})}{(\sqrt{5}+n+1)},\lim_{x\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\sqrt{6}-\sqrt{5}\approx$$

$$2.44-2.23\approx 0.11<1$$

הטור מתבדר לפי משפט ראבה גבול.