המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>מבחן סוף בקורס אינפיב התשע"ה -סמסטר אביב, מועד ג.</u>

יום ד, ו כסלו התשע"ו 18-11-2015

- מורה : גיורא דולה.
- משך המבחן שלוש שעות.
- מותר להשתמש במחשבונים לא מדעיים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- יש לנמק את כל החשובים.
- המבחן כולל 7 שאלות.
- שאלה 1 סעיף א היא שאלת הוכחה בת משקל של 10 נקודות. כל סעיף אחר משקלו 9 נקודות.

בהצלחה.

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. א. נסח **<u>והוכח</u>** את מבחן לייבניץ להתכנסות טורים. (10%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n-\ln n}$.

2. מצא את הגבול הבא:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+n^2}+2\sqrt{4+n^2}+\ldots+n\sqrt{n^2+n^2}}{n^3}$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות:

$f(x)=x^4+x^3+x+6$ ו $g(x)=2x^2+x+6$

4. פתור שתיים משלושת האינגרלים הבאים:

א. $\int x\cdot\arctan(x)dx$

ב. $\int\frac{7}{1+\sin x+2\cos x}dx$

ג. $\int\frac{2x^5-19x^3-27}{x^4+9x^2}dx$

5. בדוק את התכנסות האינטגרל הבא : $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} \cos^2 x \cdot dx$ נמק.

6. . חשב את אורך העקומה $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ בתחום $1 \le x \le 4$

7. ענה על שלוש מתוך ארבעת הסעיפים הבאים.
בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק.

א : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+\ldots+n!}{n^n}$

ב : $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n}{n \ln n}$

ג : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$

ד : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{n^n} \cos(n)$

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y}, (ab)^x=a^xb^x, \sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x}, a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy}, a^{-x}=\frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a, a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$
$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x;$$
$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$
$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$
$$.(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$
$$\int \cos xdx = \sin x + C;$$
$$\int \sin xdx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:
$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$
אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:
$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:
$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

.11
א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות
π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

:

$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

תשובות

ב-1

נציג את הסדרה $\frac{\frac{\ln n}{n}}{1-\frac{\ln n}{n}}=\frac{\ln n}{n-\ln n}$, ונגזרתו של המונה החדש היא $\frac{1-\ln n}{n^2}$ והיא שלילית עבור $3\le n$ ולכן המונה החדש חיובי ויורד. המכנה החדש חיובי ועולה ולכן כשעושים לו אחד חלקי הוא חיובי ויורד ולכן $\frac{\ln n}{n}\frac{1}{1-\frac{\ln n}{n}}=\frac{\frac{\ln n}{n}}{1-\frac{\ln n}{n}}=\frac{\ln n}{n-\ln n}$ הוא מכפלה של חיוביים ויורדים ולכן גם הוא כזה. $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1}=0$. לכן הסדרה יורדת ושואפת ל -0 והטור מתכנס לפי משפט לייבניץ.

דרך נוספת (קצרה יותר) לבדיקת התנאי שהסדרה חיובית ויורדת.
נבדק כי מתקיים שהסדרה חיובית. ברור שהמונה חיובי. נוכיח שהחל ממקום מסוים גם המכנה חיובי.

$$(n-\ln n>0)\leftrightarrow(n>\ln n)\leftrightarrow(\frac{\ln n}{n}<1)\leftarrow(\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\doteq\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1}=0$$

ולכן יש K כך ש $(n>K)\rightarrow(n-\ln n>0)\rightarrow(\frac{\ln n}{n-\ln n}>0)$. כעת נחשב את הנגזרת של הבטוי:

$$[\frac{\ln n}{n-\ln n}]'=\frac{1/n(n-\ln n)-(1-1/n)\ln n}{(n-\ln n)^2}=\frac{1-\ln n/n-\ln n+\ln n/n}{(n-\ln n)^2}=\frac{1-\ln n}{(n-\ln n)^2}$$

בנגזרת המונה שלילי עבור $n>e$ והמכנה חיובי, ולכן עבור $n>e$ הנגזרת שלילית והסדרה יורדת.

.2

$$\frac{k\sqrt{k^2+n^2}}{n^3}=\frac{k\sqrt{(k/n)^2+1}}{n^2}=\frac{1}{n}\frac{k}{n}\sqrt{(\frac{k}{n})^2+1}$$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+n^2}+2\sqrt{4+n^2}+...+n\sqrt{n^2+n^2}}{n^3}=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx=\int_1^2\frac{du}{2}\sqrt{u}=\frac{\sqrt{u}^3}{3}|_1^2=\frac{\sqrt{8}-1}{3}$$

.3

$$f(x)=x^4+x^3+x+6=g(x)=2x^2+x+6\rightarrow f-g=x^4+x^3-2x^2=x^2(x+2)(x-1).$$

$$f(-1)<g(-1),\ f(0.5)<g(0.5)\rightarrow S=\int_{-2}^{1}(2x^2-x^4-x^3)dx=\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}|_{-2}^{1}=$$

$$=\frac{2(1+8)}{3}-\frac{(1+32)}{5}-\frac{(1-16)}{4}=6-\frac{33}{5}+\frac{15}{4}=6-\frac{132-75}{20}=6-\frac{57}{20}=\frac{120-57}{20}=\frac{63}{20}$$

4 א.

$$I=\int x\cdot\arctan(x)dx,\ f'=x,g=\arctan(x),\ f=\frac{x^2}{2},g=\frac{1}{x^2+1},I=\frac{x^2\arctan(x)}{2}-\int\frac{x^2dx}{2(x^2+1)},=$$

$$=\frac{x^2\arctan(x)}{2}-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{x^2+1})dx=\frac{x^2\arctan(x)-x+\arctan(x)}{2}$$

ב.

$$\int\frac{7}{1+\sin x+2\cos x}dx=\int\frac{7}{1+\frac{2t}{t^2+1}+2\frac{1-t^2}{t^2+1}}\frac{2dt}{t^2+1}=\int\frac{14dt}{t^2+1+2t+2(1-t^2)}=$$

$$=\int\frac{14dt}{-t^2+2t+3}=\int\frac{-14dt}{(t-3)(t+1)}=\frac{-14}{4}\int(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+1})dt=\frac{-7}{2}(\ln|t-3|-\ln|t+1|)+c$$

$$=\frac{-7}{2}(\ln|\tan(x/2)-3|-\ln|\tan(x/2)+1|)+c.$$

ג.

$$\int\frac{2x^5-19x^3-27}{x^4+9x^2}dx=I,\frac{2x^5-19x^3-27}{x^4+9x^2}=2x+\frac{-37x^3-27}{x^4+9x^2}=2x+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+9}\rightarrow$$

$$-37x^3-27=(Ax+B)(x^2+9)+x^2(Cx+D)=x^2((A+C)x+(B+D))+9(Ax+B)\rightarrow$$

$$9B=-27,9A=0,B+D=0,A+C=-37\rightarrow\frac{2x^5-19x^3-27}{x^4+9x^2}=2x-\frac{3}{x^2}+\frac{-37x+3}{x^2+9},$$

$$I=x^2+\frac{3}{x}-\frac{37}{2}\ln(x^2+9)+\arctan(\frac{x}{3})+c$$

5. $\frac{1}{x^2}\geq|e^{-\sqrt{x}}|\leq|e^{-\sqrt{x}}\cos^2 x|$ וכדי להוכיח את אי השויון האחרון נביט ב

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^{\sqrt{x}}/2\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^{1.5}}{e^{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x}{e^{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{24\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{24}{e^{\sqrt{x}}}=0$$

ולכן החל ממקום מסוים המונה קטן מהמכנה, ולכן הפונקציה קטנה מ $\frac{1}{x^2}$
שלה יש אינטגרל מתכנס, ולכן גם האינטגרל שבשאלה מתכנס.

6.

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}\to y'=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}\to(y')^2+1=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4x^4}+\frac{1}{2}=(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2})^2,l=\int_1^4(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2})dx=$$

$$=(\frac{x^3}{6}-\frac{1}{2x})|_1^3=\frac{27-1}{6}-\frac{1}{18}+\frac{1}{2}=\frac{24+9-1}{18}=\frac{32}{18}=\frac{16}{9}$$

7. א:

$$a_n=\frac{1!+2!+...+n!}{n^n}\le b_n=\frac{n!n}{n^n},\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(n+1)!(n+1)n^n}{n!n(n+1)^{n+1}}=\frac{(n+1)^2n^n}{n(n+1)^{n+1}}=(\frac{n}{n+1})^{n-1}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{e}$$

הטור b_n מתכנס לפי מבחן ד'אלמברט ולכן הטור החיובי a_n הקטן ממנו גם כן מתכנס.

ב: הסדרה $\left(1+\frac{4}{n}\right)^n$ מתכנסת ל e^4 , ולכן יש קבוע חיובי K כך שהחל ממקום מסוים היא גדולה מ-K, והחל מאותו מקום מתקיים כי $\frac{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n}{n\ln n}\le\frac{K}{n\ln n}$. נוכיח כי $\frac{K}{n\ln n}$ מתבדר ובכך כי הטור שבתרגיל מתבדר. ואכן גם n וגם lnn עולים ושואפים לאינסוף, ולכן גם מכפלתם עולה ושואפת לאינסוף, ולכן $\frac{K}{n\ln n}$ יורדת ושואפת ל-0, ומותר להשתמש במבחן האינטגרל, ומתקיים

$$\int_e^\infty\frac{Kdx}{x\ln x}=?,,t=\ln x,xdt=dx,\int_e^\infty\frac{Kdx}{x\ln x}=\int_1^\infty\frac{Kdt}{t}=\ln\infty-\ln 1=\ln\infty=\infty,,$$

ג.

ג:

$$a_n=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+2)!4^n(n!)^2}{(2n)!4^{n+1}((n+1)!)^2}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1))^2}=\frac{2n+1}{2(n+1)},\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

מבחן ד'אלמברט נעבור למבחן ראבה.

$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n\frac{(2n+2)-(2n+1)}{2n+1}=\frac{n}{2n+1},\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\frac{1}{2}<1$. הטור מתבדר לפי מבחן ראבה

ד: $|(-1)^n\frac{2^nn!}{n^n}\cos(n)|\le\frac{2^nn!}{n^n}$ נוכיח כי $\frac{2^nn!}{n^n}$ מתכנס לפי מבחן ד'אלמברט. ולכן הטור שבשאלה מתכנס בהחלט.

$$b_n=\frac{2^nn!}{n^n},\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(n+1)!2^{n+1}n^n}{n!2^n(n+1)^{n+1}}=\frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=2(\frac{n}{n+1})^n=\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n},\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2}{e}<1$$