המכללה האקדמית נתניה

מבחן באינפי ב׳ - מועד מיוחד

שם המרצה: ד״ר גיורא דולה
תאריך הבחינה:
משך הבחינה: שלוש שעות
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1 א. נסח **<u>והוכח</u>** את המבחן האינטגרלי להתכנסות טורים חיוביים. (20%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{-3}(n+1)}{n+1}$

2. מצא את הגבול הבא: (10%)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{n}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4n}}+\frac{\pi}{n}\frac{1}{\cos\frac{2\pi}{4n}}+\frac{\pi}{n}\frac{1}{\cos\frac{3\pi}{4n}}+\cdots+\frac{\pi}{n}\frac{1}{\cos\frac{(n-1)\pi}{4n}}\right)$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות: (10%)

$f(x)=x^4+3x^2-2$ ו $g(x)=-x^3+5x^2-2$

4. חשב את אורך הקשת של העקומה $y=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{4}x^{-2}$ (10%)

בתחום: $1\le x\le 4$.

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: $\int_3^{\infty}\frac{\sqrt{x+5}\cdot\ln x+1}{x\cdot\sqrt{x}}dx$ נמק. (10%

6. ענה על ארבעה מתוך חמשת הסעיפים הבאים. בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק. (40%)

א: $\sum_{n=2}^{\infty}2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})}$

ב: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+4}{\ln(n)}$

ג: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(2n)!}$

ד: $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$

ה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2\sin(\frac{n}{2}\pi)}{n^3+7}$

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) הוא $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y=a^{x+y},(ab)^x=a^x b^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x,e=2.718281828\ldots$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)'=ax^{a-1},\qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x);$$
$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$
$$(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

:

$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

:

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות

1-ב עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{-3}(n+1)}{n+1}$ נשתמש במבחן האינטגרל ולכן עלינו לבדוק כי הפונקציה $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln^3(x+1)}$ יורדת (החל ממקום מסוים), ושואפת ל-0. ואכן

$$f(x)=\frac{-(\ln^3(x+1)+(x+1)3\ln^2(x+1)(\frac{1}{x+1}))}{(x+1)^2\ln^6(x+1)}=\frac{-(\ln^3(x+1)+3\ln^2(x+1))}{(x+1)^2\ln^6(x+1)}=\frac{-(\ln(x+1)+3)}{(x+1)^2\ln^4(x+1)}$$

ונובע כי $f'<0$ לכל x חיובי ונובע כי אכן f יורדת, וברור שגבולה הוא 0. וכעת

$$I=\int_{e-1}^{a}\frac{dx}{(x+1)\ln^3(x+1)},u=\ln(x+1),du=\frac{dx}{x+1},I=\int_{1}^{\ln(a+1)}\frac{du}{u^3}=\frac{-1}{2u^2}\Big|_{1}^{\ln(a+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(\ln(a+1))^2},\lim_{a\to\infty}I=\frac{1}{2}$$

, והאינטגרל מתכנס ולכן גם הטור מתכנס.

.2

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{n}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4n}}+\frac{\pi}{n}\frac{1}{\cos\frac{2\pi}{4n}}+\frac{\pi}{n}\frac{1}{\cos\frac{3\pi}{4n}}+\cdots+\frac{\pi}{n}\frac{1}{\cos\frac{(n-1)\pi}{4n}}\right)=$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4n}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4n}}+\frac{\pi}{4n}\frac{1}{\cos\frac{2\pi}{4n}}+\frac{\pi}{4n}\frac{1}{\cos\frac{3\pi}{4n}}+\cdots+\frac{\pi}{4n}\frac{1}{\cos\frac{(n-1)\pi}{4n}}\right)=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos(x)},t=\tan(\frac{x}{2}),$$

$$dx=\frac{dt}{1+t^2},\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2},S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos(x)}=4\int_0^{\tan(\frac{\pi}{8})}\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}=4\int_0^{\tan(\frac{\pi}{8})}\frac{dt}{1-t^2}=2\int_0^{\tan(\frac{\pi}{8})}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=$$

$$=\ln(1+t)-\ln(1-t)\Big|_0^{\tan(\frac{\pi}{8})}=\ln(1+\tan(\frac{\pi}{8}))-\ln(1-\tan(\frac{\pi}{8}))$$

.3

3

$$f(x)=x^4+3x^2-2, g(x)=-x^3+5x^2-2. f=g\to x^4+3x^2-2=-x^3+5x^2-2\to$$
$$x^4+x^3-2x^2=0, x^2(x+2)(x-1)=0, x=-2,0,1, f(-1)=1+3-2=2<g(-1)=1+5-2=4,$$
$$f(0.5)=0.0625+0.75-2=-1.1875<g(0.5)=1.25-2-0.125=-0.625, S=-\int_0^1(x^4+x^3-2x^2)dx$$
$$-\int_{-2}^0(x^4+x^3-2x^2)dx. h(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}, S=-h(1)+h(0)-h(0)+h(-2)=$$
$$=-(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3})+(\frac{-32}{5}+\frac{16}{4}+\frac{16}{3})=\frac{40-12-15}{60}+\frac{320+240-384}{60}=\frac{13}{60}+\frac{176}{60}=\frac{189}{60}$$

.4

$$y=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{4}x^{-2}, y'=\frac{x^3}{2}-\frac{1}{2x^3}, (y')^2=\frac{x^6}{4}+\frac{1}{4x^6}-\frac{1}{2}, (y')^2+1=\frac{x^6}{4}+\frac{1}{4x^6}+\frac{1}{2}=(\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2x^3})^2,$$
$$l=\int_1^4(\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2x^3})dx=\frac{x^4}{8}-\frac{1}{4x^2}\Bigg|_1^4=(32-\frac{1}{8})-(\frac{1}{64}-\frac{1}{4})=32+\frac{16-8-1}{64}=32+\frac{7}{64}$$

.5

$$\int_3^\infty\frac{\sqrt{x+5}\cdot\ln x+1}{x\cdot\sqrt{x}}dx=\int_3^\infty\frac{1}{x\cdot\sqrt{x}}dx+\int_3^\infty\frac{\sqrt{x+5}\cdot\ln x}{x\cdot\sqrt{x}}dx, \int_3^\infty\frac{1}{x\cdot\sqrt{x}}dx=\int_3^\infty\frac{1}{x^{1.5}}dx<\infty,$$
$$\frac{\frac{\sqrt{x+5}\cdot\ln x}{x\cdot\sqrt{x}}}{\frac{\ln x}{x}}=\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}}=\sqrt{1+\frac{5}{x}}, \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{x+5}\cdot\ln x}{x\cdot\sqrt{x}}}{\frac{\ln x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{5}{x}}=1.$$

המחובר הראשון הוא אינטגרל מתכנס, ולכן אם השני מתכנס או מתבדר בהתאמה כך יהיה הסכום, כלומר כך תהיה הפונקציה שבתרגיל המקורי. עבור המחובר השני, ממבחן השואת הגבול נובע כי המחובר השני מתכנס או מתבדר בהתאמה אם האינטגרל $\int_3^\infty\frac{\ln x}{x}dx$ מתכנס או מתבדר, אבל לפי מבחן ההשואה זהו אינטגרל מתבדר, ולכן האינטגרל כולו מתבדר.

6-א עבור הטור $\sum_{n=2}^{\infty} 2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})}$ נשתמש במבחן ד'אלמברט, ואז

נגדיר $a_n = 2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})}}{2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})}} = 2^{-\frac{1}{n}}, \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 2^{-\frac{1}{n}} = 2^0 = 1.$

ולכן מבחן ד'אלמברט נכשל, נפנה למבחן ראבה ונקבל

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}, \lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x \ln 2}{1} = \ln 2 < 1$$

ולכן לפי מבחן ראבה הטור מתבדר.

6-ב עבור הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 4}{\ln(n)}$ נשתמש במבחן ההשואה, ונקבל

$\frac{3}{\ln(n)} \le \frac{(-1)^{n+1} + 4}{\ln(n)}$ ולכן סדרת הטור גדולה מסדרת איברי טור

שמתבדר, ולכן הטור מתבדר.

6-ג גם עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(2n)!}$ נשתמש במבחן ההשואה,

ונקבל

$$\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(2n)!} \le \frac{n\cdot n!}{(2n)!} \le \frac{(n+1)\cdot n!}{(2n)!} = \frac{(n+1)!}{(2n)!} = \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(2n)} \le \frac{1}{(2n-1)(2n)} \le \frac{1}{n2n}$$

ולכן סדרת הטור חיובית וקטנה מסדרת איברי טור שמתכנס,
ולכן הטור מתכנס.

6-ד עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ נחשב את סדרת הסכומים החלקיים,

ונקבל

$$\ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(\frac{n+1}{n}) = \ln(n+1) - \ln(n), S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$ ולכן הטור מתבדר.

ה-6 נציב כמה ערכים של n ונראה כי $\sin(\frac{n}{2}\pi)=\begin{cases}0 & n=4k\\ 1 & n=4k+1\\ 0 & n=4k+2\\ -1 & n=4k+3\end{cases}$ ערכים

אלו נציב בנוסחה ונקבל את טור לייבניץ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2(2n-1)^2}{(2n-1)^3+7}$ שהוא

מתכנס. כדי לודא זאת עלינו לבדוק כי $f(x)=\frac{2(2x-1)^2}{(2x-1)^3+7}$ יורדת

החל ממקום מסוים וברור שגבולה הוא 0. ואכן עבור

$$f(x)=\frac{2(2x-1)^2}{(2x-1)^3+7},\ f'(x)=\frac{2(2x-1)2\cdot 2[(2x-1)^3+7]-3(2x-1)^2 2\cdot 2(2x-1)^2}{((2x-1)^3+7)^2}=$$

$$=\frac{4(2x-1)[2(2x-1)^3+14-3(2x-1)^3]}{((2x-1)^3+7)^2}=\frac{4(2x-1)[14-(2x-1)^3]}{((2x-1)^3+7)^2}.$$

עבור 2<x הגורם הראשון במונה חיובי והשני שלילי, המכנה חיובי, ולכן אכן הפונקציה יורדת עבור 2<x, כדרוש.