המכללה האקדמית נתניה

מבחן לדוגמא באינפי ב'

שם המרצה:
תאריך הבחינה :
משך הבחינה: שלוש שעות
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. א. נסח **<u>והוכח</u>** את מבחן ראבה להתכנסות טורים חיוביים. (20%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: $\sum_{n=2}^{\infty} 2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})}$

2. מצא את הגבול הבא: (10%)

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{2n}{\sqrt{7n^4-n^2}}+\frac{2n}{\sqrt{7n^4-4n^2}}+\frac{2n}{\sqrt{7n^4-9n^2}}+\cdots+\frac{2n}{\sqrt{7n^4-n^4}}\right)$$

3. חשב את אורך הקשת של העקומה $x^2=(3y)^{\frac{2}{3}}-2$ (10%)
בתחום: $1 \le x \le 4$.

4. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות: (10%)

$f(x)=x^3+4x^2-2x$ ו $g(x)=-2x^2+5x$

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: $\int_1^\infty \frac{\ln^2 x \cdot \sin(\frac{x}{3})}{x} dx$ נמק. (10%)

6. ענה על ארבעה מתוך חמשת הסעיפים הבאים. בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק. (40%)

א: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2+5}{5n^2-3}\right)^{n^3+4n^2-2n}$

ב: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(2n)!}$

ג: $\sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)}$

ד: $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 \cdot \sin^3 \frac{1}{n}$

ה: $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln^3 n}{\sqrt{n}}$

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, a^0 = 1,$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו $0 < a, a \neq 1$.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a(x / y) = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a \sqrt[y]{x} = \tfrac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828...$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S=\int_a^b (g(x)-f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V=\pi\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right), \qquad \sin^2 x+\cos^2 x=1;$$

$$\tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right), \qquad \tan x\cdot\cot x=1;$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות :

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
:
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
:
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

תשובות:

1-ב

עבור הטור $\sum_{n=2}^{\infty} 2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})}$ נשתמש במבחן ד'אלמברט, ואז נגדיר

$a_n = 2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})}}{2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})}} = 2^{-\frac{1}{n}}, \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 2^{-\frac{1}{n}} = 2^0 = 1.$ ולכן

מבחן ד'אלמברט נכשל, נפנה למבחן ראבה ונקבל

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1) = n(2^{\frac{1}{n}}-1) = \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}, \lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1) = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{1} = \ln 2 < 1$$

ולכן לפי מבחן ראבה הטור מתבדר.

.2

$$\frac{2n}{\sqrt{7n^4-n^2}}+\frac{2n}{\sqrt{7n^4-4n^2}}+\frac{2n}{\sqrt{7n^4-9n^2}}+\cdots+\frac{2n}{\sqrt{7n^4-n^4}} =$$

$$= \frac{2n}{\sqrt{n^4(7-1/n^2)}}+\frac{2n}{\sqrt{n^4(7-4/n^2)}}+\frac{2n}{\sqrt{n^4(7-9/n^2)}}+\cdots+\frac{2n}{\sqrt{n^4(7-n^2/n^2)}} =$$

$$= 2\frac{1}{n}(\frac{1}{\sqrt{7-(1/n)^2}}+\frac{1}{\sqrt{7-(2/n)^2}}+\frac{1}{\sqrt{7-(3/n)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{7-(n/n)^2}})$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{7n^4-n^2}}+\frac{2n}{\sqrt{7n^4-4n^2}}+\frac{2n}{\sqrt{7n^4-9n^2}}+\cdots+\frac{2n}{\sqrt{7n^4-n^4}} = 2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{7-x^2}} = 2\arcsin(x/\sqrt{7})\Big|_0^1 =$$

$$= 2\arcsin(1/\sqrt{7})$$

.3

$$x^2 = (3y)^{\frac{2}{3}}-2 \to y = \frac{(x^2+2)^{1.5}}{3}, y' = \frac{1.5(x^2+2)^{0.5}2x}{3} = x\sqrt{x^2+2}, (y')^2 = x^4+2x^2, (y')^2+1 = (x^2+1)^2,$$

$$l = \int_1^4 (x^2+1)dx = (\frac{x^3}{3}+x)\Big|_1^4 = \frac{64-1}{3}+3 = 24$$

.4

$$f(x) = x^3+4x^2-2x, g(x) = -2x^2+5x.(f=g) \to x^3+4x^2-2x = -2x^2+5x$$

$$\to x^3+6x^2-7x = 0 \to x = -7,0,1. f(0.5) = 0.125+1-1 = 0.125 < g(0.5) = -0.5+2.5 = 2$$

$$g(-1) = -7 < f(-1) = 5, S = \int_{-7}^0 (x^3+6x^2-7x)dx - \int_0^1 (x^3+6x^2-7x)dx, h(x) = \frac{x^4}{4}+2x^3-\frac{7x^2}{2},$$

$$S = 2h(0)-h(-7)-h(1) = -h(-7)-h(1) = -(\frac{2401}{4}-686-\frac{343}{2})-(\frac{1}{4}+2-\frac{7}{2}) = -343(\frac{7}{4}-2-\frac{1}{2})$$

$$+\frac{(-1-8+14)}{4} = 343(\frac{8+4-7}{4})+\frac{5}{4} = \frac{5}{4}(344) = 430.$$

ו

5. עבור $\int_1^\infty \frac{\ln^2 x\cdot\sin(\frac{x}{3})}{x}dx$ נגדיר $f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}, g(x)=\sin(\frac{x}{3})$ ונודא כי f יורדת החל ממקום מסוים וגבולה הוא 0, וכי האינטגרל של g היא פונקציה חסומה.

ואכן $f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}, f'(x)=\frac{x\frac{2\ln x}{x}-1\ln^2 x}{x^2}=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$, ולכן עבור $e^2<x$, f יורדת. כמו כן $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$

וכמו כן $\int_a^b \sin(\frac{x}{3})dx=-\frac{1}{3}\cos(\frac{x}{3})\Big|_a^b=\frac{1}{3}\cos(\frac{a}{3})-\frac{1}{3}\cos(\frac{b}{3}),$ ולכן

$$|\int_a^b \sin(\frac{x}{3})dx|\le|\frac{1}{3}\cos(\frac{a}{3})-\frac{1}{3}\cos(\frac{b}{3})|\le|\frac{1}{3}\cos(\frac{a}{3})|+|\frac{1}{3}\cos(\frac{b}{3})|\le\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

מתקיימים תנאי משפט דירכלה והאינטגרל מתכנס.

6.א בטור $\sum_{n=1}^\infty(\frac{5n^2+5}{5n^2-3})^{n^3+4n^2-2n}$ נשים לב כי הבסיס שואף ל-1 והמעריך לאינסוף ולכן נחשב

$(a_n-1)b_n=(\frac{5n^2+5}{5n^2-3}-1)(n^3+4n^2-2n)=\frac{8(n^3+4n^2-2n)}{5n^2-3}, \lim_{x\to\infty}(a_n-1)b_n=\infty$ ולכן מתקיים כי סדרת המחוברים a_n שואפת ל $e^\infty=\infty$ ולכן בודאי שהטור מתבדר.

6.ב

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(2n)!}, 0\le\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(2n)!}\le\frac{n!+n!+n!+\cdots+n!}{(2n)!}=\frac{n\cdot n!}{(2n)!}\le\frac{(n+1)\cdot n!}{(2n)!}=\frac{(n+1)!}{(2n)!}=$$

$$=\frac{1}{(n+2)\times\cdots\times(2n-1)\times(2n)}\le\frac{1}{(2n-1)\times(2n)}\le\frac{1}{n\times(2n)}=\frac{1}{2n^2}$$

כאשר אי השויון האחרון $n\le 2n-1$ מתקיים עבור כל מספר טבעי. לכן הסדרה החיובית של הטור קטנה מסדרה של טור חיובי ומתכנס ולכן הטור מתכנס לפי מבחן ההשואה.

6.ג בטור $\sum_{n=100}^\infty\frac{1}{n\ln^2(n)}$ נשים לב כי הפונקציה יורדת החל ממקום מסוים, שכן עבור $f(x)=\frac{1}{x\ln^2(x)}$ מתקיים

$f'(x)=-\dfrac{\ln^2(x)+x\dfrac{2\ln(x)}{x}}{x^2\ln^4(x)}=-\dfrac{\ln^2(x)+2\ln(x)}{x^2\ln^4(x)}=-\dfrac{\ln(x)+2}{x^2\ln^3(x)}$ כלומר f' שלילית

עבור x אי שלילי וברור כי הגבול שלה הוא 0 לכן לפי משפט האינטגרל התכנסות האינטגרל שקולה להתכנסות האינטגרל $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^2(x)}$ ומתקיים

$$I=\int_e^a \frac{dx}{x\ln^2(x)}=?,u=\ln(x),du=\frac{dx}{x},I=\int_1^{\ln(a)}\frac{du}{u^2}=\frac{-1}{u}\Big|_1^{\ln(a)}=1-\frac{1}{\ln(a)},\lim_{a\to\infty}\int_e^a\frac{dx}{x\ln^2(x)}=1$$

ולכן האינטגרל מתכנס ולכן הטור מתכנס.

6.ד נשתמש במבחן השואת הגבול עבור $\sum_{n=2}^{\infty} n^2\cdot\sin^3\frac{1}{n}$ ונקבל

$$a_n=n^2\cdot\sin^3\frac{1}{n},b_n=\frac{1}{n},\frac{a_n}{b_n}=\frac{n^2\cdot\sin^3\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\frac{\sin^3\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}=\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^3,\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^3=?,x=\frac{1}{n},$$

,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^3=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3=1^3=1$$

ולכן לפי מבחן השואת הגבול, ומכיון ש $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר, אז גם $\sum_{n=2}^{\infty} n^2\cdot\sin^3\frac{1}{n}$

מתבדר.

6.ה הטור $\sum_{n=10}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln^3 n}{\sqrt{n}}$ הוא טור לייבניץ בעל סימנים מתחלפים

וכדי לודא זאת מספיק לראות כי החל ממקום מסוים $\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}$ יורדת

ל-0. ואכן $\left(\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}\right)'=\frac{\sqrt{n}3\ln^2 n\cdot(1/n)-(1/2\sqrt{n})\ln^3 n}{n}=\frac{\ln^2 n(6-\ln n)}{2n\sqrt{n}}$ והנגזרת

שלילית עבור $e^6<n$. כמו כן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3\ln^2 n}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\ln^2 n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{12\ln n}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{24\ln n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{24}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{48}{\sqrt{n}}=0.$$

כדרוש.