המכללה האקדמית נתניה

מבחן דוגמא באינפי ב'

שם המרצה :
תאריך הבחינה :
משך הבחינה : שלוש שעות
חומר עזר : מחשבון (לא גרפי).

<u>ענה על כל השאלות הבאות :</u>

1. א. נסח <u>**והוכח**</u> את המבחן האינטגרלי להתכנסות טורים חיוביים. (10%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא : $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n) \cdot \ln(\ln(n))}$ (8%)

2. . מצא את הגבול הבא :
(10%)

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n}{\sqrt{9n^4 - n^2}} + \frac{2n}{\sqrt{9n^4 - 4n^2}} + \frac{2n}{\sqrt{9n^4 - 9n^2}} + \cdots + \frac{2n}{\sqrt{9n^4 - n^4}} \right)$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות :
$f(x) = x\sqrt{x} - x$ ו $g(x) = 4x - 4\sqrt{x}$ (10%)

4. חשב את אורך הקשת של העקומה $x^2 = (3y)^{\frac{2}{3}} - 2$ (10%)
בתחום : $1 \le x \le 4$.

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא : $\int_1^{\infty} \sin(x^2)dx$ נמק. (10%)
רמז : השתמש בהצבה : $t = x^2$

6. בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק . (32%)

א: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(2n)!}$

ב: $\sum_{n=2}^{\infty}\ln(1-\frac{1}{n})$

ג: $\sum_{n=2}^{\infty}2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})}$

ד: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin(n!)}{n^{2}}$

7. הוכח כי פונקציה המוגדרת על קטע סופי ואיננה חסומה, לא יכולה להיות אינטגרבילית. (10%)

בהצלחה!!!

<u>רשימת משפטים למבחן הסופי :</u>

1. מבחן ההשואה לטורים חיוביים.
2. מבחן ההשואה הגבולי לטורים חיוביים.
3. מבחן השואת המנות לטורים חיוביים.
4. מבחן האינטגרל לטורים חיוביים.
5. מבחן המנה של ד'אלמברט לטורים חיוביים גרסת האיברים
6. מבחן המנה של ד'אלמברט לטורים חיוביים גרסת הגבול
7. מבחן השרש של קושי לטורים חיוביים גרסת האיברים
8. מבחן השרש של קושי לטורים חיוביים גרסת הגבול
9. מבחן רבה לטורים חיוביים גרסת האיברים
10. מבחן רבה לטורים חיוביים גרסת האיברים
11. משפט לייבניץ.

ובנוסף תהיה אחת הטענות הבאות

1. עבור $f(x)=x^2$ ועבור חלוקה שווה של הקטע [a,b] סכומי דרבו העליונים שואפים ל $\frac{b^3-a^3}{3}$
2. נתונות שתי חלוקות סופיות T,R של אותו קטע, ונתון כי R⊂T, אז מתקיים עבור סכומי דרבוהעליונים כי SU(R)≤SU(T) ועבור סכומי דרבו העליונים כי SL(T)⊂SL(R).
3. קבוצת כל סכומי דרבו העליונים חסומה, קבוצת כל סכומי דרבו התחונים חסומה, כל סכום דרבו עליון גדול מכל סכום דרבו תחתון.
4. עבור פונקציה רציפה f, הפונקציה $\int_a^x f(t)dt$ היא גזירה ונגזרתה שווה ל-f.

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$

$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a \sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828...$$

$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0 : $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)'=ax^{a-1},\qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$

$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (e^x)'=e^x;$$

$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x);$$

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$

$$(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

11.

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
:
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
:
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות

1-ב נביט בפונקציה x, היא חיובית ועולה עבור 0<x, נביט בפונקציה ln(x), היא חיובית ועולה עבור 1<x. נביט ב ln(ln(x)) היא חיובית ועולה עבור e<x.

אז המכפלה xln(x)ln(ln(x)) היא חיובית ועולה עבור e<x, ולכן הסדרה של הטור חיובית ויורדת. כמו כן $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\cdot\ln(x)\cdot\ln(\ln(x))}=0$, ולכן אפשר להשתמש במבחן האינטגרל . ואכן

$$I=\int_{e^e}^{a}\frac{dx}{x\cdot\ln(x)\cdot\ln(\ln(x))}=?,u=\ln(\ln(x)),du=\frac{dx}{x\cdot\ln(x)},I=\int_{1}^{\ln(\ln(a))}\frac{du}{u}=\ln(u)\Big|_{1}^{\ln(\ln(a))}=\ln(\ln(\ln(a)))-0.$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_{e^e}^{a}\frac{dx}{x\cdot\ln(x)\cdot\ln(\ln(x))}=\lim_{a\to\infty}\ln(\ln(\ln(a)))=\infty$$

כלומר האינטגרל מתבדר ולכן גם הטור.

.2

$$\frac{2n}{\sqrt{9n^4-n^2}}+\frac{2n}{\sqrt{9n^4-4n^2}}+\frac{2n}{\sqrt{9n^4-9n^2}}+\cdots+\frac{2n}{\sqrt{9n^4-n^4}}=$$

$$=\frac{2n}{\sqrt{n^4(9-1/n^2)}}+\frac{2n}{\sqrt{n^4(9-4/n^2)}}+\frac{2n}{\sqrt{n^4(9-9/n^2)}}+\cdots+\frac{2n}{\sqrt{n^4(9-n^2/n^2)}}=$$

$$=2\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{9-(1/n)^2}}+\frac{1}{\sqrt{9-(2/n)^2}}+\frac{1}{\sqrt{9-(3/n)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9-(n/n)^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{9n^4-n^2}}+\frac{2n}{\sqrt{9n^4-4n^2}}+\frac{2n}{\sqrt{9n^4-9n^2}}+\cdots+\frac{2n}{\sqrt{9n^4-n^4}}=2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=2\arcsin(x/\sqrt{9})\Big|_0^1=$$

$$=2\arcsin(1/\sqrt{9})$$

.3

$$f(x)=x\sqrt{x}-x,g(x)=4x-4\sqrt{x}.f=g\to x\sqrt{x}-x=4x-4\sqrt{x}\to x\sqrt{x}-5x+4\sqrt{x}=0\to$$

$$\sqrt{x}(x-5\sqrt{x}+4)=0\to\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-4)=0\to\sqrt{x}=0,1,4\to x=0,1,16,$$

$$g(0.25)=-1<f(0.25)=-0.125,\ f(4)=4<g(4)=8,S=\int_0^1(x\sqrt{x}-5x+4\sqrt{x})dx-\int_1^{16}(x\sqrt{x}-5x+4\sqrt{x})dx.$$

$$h(x)=\frac{2\sqrt{x^5}}{5}-\frac{5x^2}{2}+\frac{8\sqrt{x^3}}{3},S=2h(1)-h(0)-h(16)=\frac{4}{5}-5+\frac{16}{3}-0-\frac{2048}{5}+640-\frac{512}{3}=$$

$$=-\frac{496}{3}-\frac{2044}{5}+635=635-165-\frac{1}{3}-409-\frac{3}{5}=61-\frac{14}{15}=60+\frac{1}{15}$$

.4 -נחלץ ונקבל

$$x^2=(3y)^{\frac{2}{3}}-2\to3y=(x^2+2)^{\frac{3}{2}}\to y=(x^2+2)^{\frac{3}{2}}/3\to y'=\frac{3(x^2+2)^{\frac{1}{2}}2x}{2\cdot3}=x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$,\to(y')^2=x^2(x^2+2)=x^4+2x^2\to(y')^2+1=x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2,l=\int_1^4\left(x^2+1\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_1^4=\frac{64-1}{3}+(4-1)=24.$$

5-נשתמש בהצבה ונקבל

$$I=\int_1^{\infty}\sin(x^2)dx, u=x^2, du=2xdx, dx=\frac{du}{2\sqrt{u}}, I=\int_1^{\infty}\frac{\sin(u)dx}{2\sqrt{u}}, f(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}, g(u)=\sin(u),$$

$$f'(u)=\frac{-1}{4\sqrt{u^3}}<0, \lim_{u\to\infty} f(u)=0, \int_0^x \sin(u)du=-\cos(u)\Big|_0^x=1-\cos(x), \left|\int_0^x \sin(u)du\right|\le 1+|\cos(x)|\le 2$$

האינטגרל מתכנס לפי מבחן דיריכלה.

6. א

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(2n)!}, 0\le\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(2n)!}\le\frac{n!+n!+n!+\cdots+n!}{(2n)!}=\frac{n\cdot n!}{(2n)!}\le\frac{(n+1)\cdot n!}{(2n)!}=\frac{(n+1)!}{(2n)!}=$$

$$=\frac{1}{(n+2)\times\cdots\times(2n-1)\times(2n)}\le\frac{1}{(2n-1)\times(2n)}\le\frac{1}{n\times(2n)}=\frac{1}{2n^2}$$

קבלנו כי האינטגרנד הוא אינטגרל של מכפלה, f חיובית ויורדת ל-0, g מקיימת כי האינטגרל שלה חסום, ולכן מתקיימים תנאי משפט דיריכלה והאינגרל מתכנס.

6.ב עבור הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\ln(1-\frac{1}{n})$ נחשב את סדרת הסכומים החלקיים.

מתקיים כי $a_n=\ln(1-\frac{1}{n})=\ln(\frac{n-1}{n})=\ln(n-1)-\ln(n)$ ולכן

$S_n=\sum_{k=2}^{n}\ln(k-1)-\ln(k)=\ln(1)-\ln(n-1)=-\ln(n-1)$ ולכן

$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}S_n=-\lim_{n\to\infty}\ln(n-1)=-\infty$ כלומר הטור מתבדר.

6. ג עבור הטור $\sum_{n=2}^{\infty}2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})}$ נשתמש במבחן ד'אלמברט, ואז

נגדיר $a_n=2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})}, \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})}}{2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})}}=2^{-\frac{1}{n}}, \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}2^{-\frac{1}{n}}=2^0=1.$

ולכן מבחן ד'אלמברט נכשל, נפנה למבחן ראבה ונקבל

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n(2^{\frac{1}{n}}-1)=\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}, \lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x\ln2}{1}=\ln2<1$$

ולכן לפי מבחן ראבה הטור מתבדר.

6 ד: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(n!)}{n^2}, |a_n|=\frac{|\sin(n!)|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$

טור הערכים המוחלטים קטן מטור מתכנס, לכן הטור המקורי מתכנס בהחלט.