# המכללה האקדמית נתניה

## מבחן דוגמא באינפי ב'

שם המרצה :
תאריך הבחינה :
משך הבחינה : שלוש שעות
חומר עזר : מחשבון (לא גרפי).

<u>ענה על כל השאלות הבאות :</u>

1. א. נסח **<u>והוכח</u>** את המבחן האינטגרלי להתכנסות טורים חיוביים. (20%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא : $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n) \cdot \ln(\ln(n))}$

2. . חשב את האינטגרל הבא : (10%)

$$\int \frac{-x^2 + 26x - 48}{(x-3)^2(2x+1)} dx$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות :
$f(x) = x\sqrt{x} - x$ ו $g(x) = 4x - 4\sqrt{x}$ (10%)

4. חשב את אורך הקשת של העקומה $x^2 = (3y)^{\frac{2}{3}} - 2$ (10%)
בתחום : $1 \le x \le 4$ .

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא : $\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx$ נמק. (10%)

רמז : השתמש בהצבה : $t = x^2$

6. בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק .  (40%)

א: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(2n)!}$

ב: $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1-\frac{1}{n})$

ג: $\sum_{n=2}^{\infty} 2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})}$

ד: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n!)}{n^2}$

בהצלחה!!!

## דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y=a^{x+y},(ab)^x=a^x b^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y \Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a, a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y, \qquad \log_a x^y = y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y, \qquad \log_a \sqrt[y]{x} = \tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x, \qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828...$$
$$\ln x = a \Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה $f$ בנקודה $x_0$: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)'=ax^{a-1}, \qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x, \qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x, \qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x);$$
$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$
$$(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V=\pi\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

$\pi$ רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1; \qquad \sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$$\tan x\cdot\cot x=1; \qquad \tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}; \qquad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x} \qquad 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
:
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
:
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות

1-ב  נביט בפונקציה x, היא חיובית ועולה עבור $0<x$, נביט בפונקציה  ln(x), היא חיובית ועולה עבור $1<x$.  נביט ב  ln(ln(x)) היא חיובית ועולה עבור $e<x$.

אז המכפלה xln(x)ln(ln(x)) היא חיובית ועולה עבור e<x, ולכן הסדרה של

הטור חיובית ויורדת. כמו כן $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\cdot\ln(x)\cdot\ln(\ln(x))}=0$, ולכן אפשר להשתמש

במבחן האינטגרל . ואכן

$$I=\int_{e^e}^{a}\frac{dx}{x\cdot\ln(x)\cdot\ln(\ln(x))}=?,u=\ln(\ln(x)),du=\frac{dx}{x\cdot\ln(x)},I=\int_{1}^{\ln(\ln(a))}\frac{du}{u}=\ln(u)\Big|_{1}^{\ln(\ln(a))}=\ln(\ln(\ln(a)))-0.$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_{e^e}^{a}\frac{dx}{x\cdot\ln(x)\cdot\ln(\ln(x))}=\lim_{a\to\infty}\ln(\ln(\ln(a)))=\infty$$

כלומר האינטגרל מתבדר ולכן גם הטור.

-2

$$I=\int\frac{-x^2+26x-48}{(x-3)^2(2x+1)}dx,\frac{-x^2+26x-48}{(x-3)^2(2x+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{D}{2x+1}\to$$

$$\to A(x-3)(2x+1)+B(2x+1)+D(x-3)^2=-x^2+26x-48,7B=21,12.25D=-61.25,$$

$$B=3,D=-5,-3A+B+9D=-48,3A=48+3-45=6,A=2,$$

$$I=2\ln|x-3|-\frac{3}{x-3}-\frac{5\ln(2x+1)}{2}+C$$

.3

תשובה

$$f(x)=x\sqrt{x}-x=g(x)=4x-4\sqrt{x}\to x\sqrt{x}-5x+4\sqrt{x}=0\to\sqrt{x}(x-5\sqrt{x}+4)=0\to\sqrt{x}(x-4)(\sqrt{x}-1)=0$$

$$\to\sqrt{x}=0,1,4\to x=0,1,16,f(4)=8-4=4<g(4)=16-8=8,g(0.25)=1-2=-1<f(0.25)=$$

$$=0.125-0.25=-0.125,S=\int_0^1(x\sqrt{x}-5x+4\sqrt{x})dx+\int_1^{16}(5x-x\sqrt{x}-4\sqrt{x})dx,$$

$$H=\frac{5x^2}{2}-\frac{2x^{2.5}}{5}-\frac{8x^{1.5}}{3},S=H(16)+H(0)-2H(1)=(640-\frac{2048}{5}-\frac{512}{3})+0-(\frac{5}{2}-\frac{2}{5}-\frac{8}{3})=$$

$$=640-\frac{504}{3}-\frac{2046}{5}-2.5=640-168-409.2-2.5=60.3$$

תשובה 4

$$x^2=(3y)^{\frac{2}{3}}-2\to y=\frac{(2+x^2)^{1.5}}{3},y'=\frac{2x(2+x^2)^{0.5}}{2},(y')^2=x^2(2+x^2),(y')^2+1=x^4+2x^2+1=$$

$$=(x^2+1)^2,l=\int_1^4(x^2+1)dx=(\frac{x^3}{3}+x)\Big|_1^4=\frac{64-1}{3}+4-1=24.$$

5-נשתמש בהצבה ונקבל

$$I=\int_1^\infty \sin(x^2)dx, u=x^2, du=2xdx, dx=\frac{du}{2\sqrt{u}}, I=\int_1^\infty \frac{\sin(u)dx}{2\sqrt{u}}, f(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}, g(u)=\sin(u),$$

$$f'(u)=\frac{-1}{4\sqrt{u^3}}<0, \lim_{u\to\infty} f(u)=0, \int_a^b \sin(u)du=-\cos(u)\Big|_a^b=\cos(a)-\cos(b),$$

$$|\int_0^x \sin(u)du|\le|\cos(a)|+|\cos(b)|\le 2$$

האינטגרל מתכנס לפי מבחן דיריכלה.

תשובה 6

א:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(2n)!}, a_n=\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(2n)!}\le\frac{n!+n!+n!+\cdots+n!}{(2n)!}=\frac{n\cdot n!}{(2n)!}=\frac{1}{(n-1)!}\frac{n!\cdot n!}{(2n)!}=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{\binom{2n}{n}}\le\frac{1}{(n-1)!}\le\frac{1}{2^{n-2}}$$

איברי הטור קטנים מאיברי טור המתכנס ולכן לפי מבחן ההשואה גם הטור הנוכחי מתכנס.

6.ב עבור הטור $\sum_{n=2}^\infty \ln(1-\frac{1}{n})$ נחשב את סדרת הסכומים החלקיים.

מתקיים כי $a_n=\ln(1-\frac{1}{n})=\ln(\frac{n-1}{n})=\ln(n-1)-\ln(n)$ ולכן

ולכן $S_n=\sum_{k=2}^n \ln(k-1)-\ln(k)=\ln(1)-\ln(n-1)=-\ln(n-1)$

כלומר $\sum_{n=1}^\infty \ln(1-\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty} S_n=-\lim_{n\to\infty}\ln(n-1)=-\infty$ הטור מתבדר.

ג:

$$\sum_{n=2}^\infty 2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})}, \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})}}{2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})}}=2^{-\frac{1}{n}}.\lim_{n\to\infty} 2^{-\frac{1}{n}}=2^0=1.\lim_{n\to\infty}(n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1))=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{1}=\ln 2<1$$

הטור מתבדר לפי מבחן ראבה.

ד: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin(n!)}{n^2}, |a_n| = \frac{|\sin(n!)|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$

טור הערכים המוחלטים קטן מטור מתכנס, לכן הטור המקורי מתכנס בהחלט.