

# המכללה האקדמית נתניה

## מבחן אמצע באינפי ב'

שם המרצה : ד"ר גיורא דולה  
תאריך הבחינה : יום ד כד איר התשע"ב 16-5-2012  
משך הבחינה : שעה וחצי  
חומר עזר : מחשבון (לא גרפי).  
ענה על כל חמשת השאלות הבאות :

$$\int \frac{3x^5 - 2x^3 + x - 1}{x^3 + 4x} dx \quad .1 \text{ חשב}$$

$$\int \arcsin(x) dx \quad .2 \text{ חשב}$$

$$\int \sin^9(3x) \cos^5(3x) dx \quad .3 \text{ חשב}$$

$$\int \frac{x}{2 + \sqrt{x+1}} dx \quad .4 \text{ חשב}$$

$$\int \frac{3dx}{1 + \sin x} dx \quad .5 \text{ חשב}$$

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

## 2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) הוא  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ב. פירוק הטרינום  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

## 3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, a^0 = 1,$$

$$(a^x)^y = a^{xy}, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

## 4. לוגריתמים

הגדרת ה-log:  $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה:  $\log_a x$  מוגדר רק כאשר  $x > 0$  ו-  $0 < a, a \neq 1$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x,$$

$$\ln x = \log_e x, e = 2.718281828\dots$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5. הגדרת נגזרת הפונקציה  $f$  בנקודה  $x_0$ :  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\begin{aligned}
(x^a)' &= ax^{a-1}, & (a^x)' &= \ln a \cdot a^x; \\
(\sin x)' &= \cos x, & (e^x)' &= e^x; \\
(\cos x)' &= -\sin x, & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln a}; \\
(\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}; \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

## 7. כללי גזירה

$$\begin{aligned}
(a \cdot f(x))' &= a \cdot f'(x); \\
(f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x); \\
(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x); \\
(f(x)g(x)h(x))' &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}; \\
(f(g(x)))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

## 8. אינטגרלים מיידיים

$$\begin{aligned}
\int 0 dx &= C; \\
\int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C; \\
\int \cos x dx &= \sin x + C; \\
\int \sin x dx &= -\cos x + C; \\
\int e^x dx &= e^x + C; \\
\int a^x dx &= \frac{1}{\ln a} a^x + C; \\
\int x^a dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1; \\
\int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C; \\
\int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C; \\
\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C
\end{aligned}$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א. שטח :  $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות:  $S = \frac{1}{2} \int_a^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x:  $V = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y:  $V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו:  $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

11.

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

$\pi$  רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

### ב. סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta). \quad :$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

### ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}. \quad :$$

### ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right). \quad :$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

פתרונות

1.

$$\int \frac{3x^5 - 2x^3 + x - 1}{x^3 + 4x} dx = ?, \frac{3x^5 - 2x^3 + x - 1}{x^3 + 4x} = 3x^2 - 14 + \frac{57x - 1}{x^3 + 4x}, \frac{57x - 1}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4},$$

$$57x - 1 = A(x^2 + 4) + Bx^2 + Cx, C = 57, A = -0.25, B = 0.25, \frac{3x^5 - 2x^3 + x - 1}{x^3 + 4x} =$$

$$= 3x^2 - 14 - \frac{1}{4x} + \frac{x + 228}{4(x^2 + 4)}, \int \frac{3x^5 - 2x^3 + x - 1}{x^3 + 4x} dx = \int (3x^2 - 14 - \frac{1}{4x} + \frac{x + 228}{4(x^2 + 4)}) dx =$$

$$= x^3 - 14x - \frac{\ln x}{4} + \frac{\ln(x^2 + 4)}{8} + \frac{57}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

2.

$$I = \int \arcsin(x) dx = x \arcsin(x) - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}, u = 1 - x^2, du = -2x dx, x dx = -\frac{du}{2},$$

$$I = x \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin(x) - \int \frac{(-du)}{2\sqrt{u}} = x \arcsin(x) + \sqrt{u} + C = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

3.

$$\int \sin^9(3x) \cos^5(3x) dx. I = \int \sin^9(3x) \cos^5(3x) dx. t = \sin(3x), dt = 3 \cos(3x) dx,$$

$$I = \int \sin^9(3x) \cos^5(3x) dx = \int t^9 (1-t^2)^2 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int (t^9 - 2t^{11} + t^{13}) dt =$$

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{t^{10}}{10} - \frac{t^{12}}{6} + \frac{t^{14}}{14} \right) + C = \frac{t^{10}}{30} - \frac{t^{12}}{18} + \frac{t^{14}}{42} + C = \frac{\sin^{10}(x)}{30} - \frac{\sin^{12}(x)}{18} + \frac{\sin^{14}(x)}{42} + C$$

.4

$$I = \int \frac{x+1-1}{2+\sqrt{x+1}} dx, t = \sqrt{x+1}, dt = \frac{dx}{2t}, dx = 2t dt, I = \int \frac{t^2-1}{2+t} 2t dt = \int \frac{(2t^3-2t)dt}{2+t} = \\ = \int (2t^2 - 4t + 6 - \frac{14}{2+t}) dt = t^3 - 2t^2 + 6t - 14 \ln |t+2| + C$$

.5

$$\int \frac{3dx}{1+\sin x} dx, t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}. \\ \int \frac{3dx}{1+\sin x} = \int \frac{3 \frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{6dt}{1+t^2+2t} = \int \frac{6dt}{(1+t)^2} = \frac{-6}{1+t} + C = \frac{-6}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + C.$$