המכללה האקדמית נתניה

מבחן אמצע באינפי ב׳

שם המרצה: ד״ר גיורא דולה
תאריך הבחינה: יום ד כח איר התשע״ג 8-5-2013
משך הבחינה: שעה וחצי
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

1. <u>פתור את האינטגרלים הבאים:</u> (50%)

א. חשב $\int \frac{7x^3+2x^2+20x-4}{x^2(x^2+4)}dx$

ב. חשב $\int e^{-4x}\cdot\cos(7x)dx$

2. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$ (50%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:
א: תחום הגדרה
ב: נקודות חיתוך עם הצירים.
ג: זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.
ד: תחומי עליה וירידה.
ה: נקודות קיצון.
ו: נקודות פיתול, תחומי קמירות כלפי מעלה וקמירות כלפי מטה.
ז: אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.
ח: שרטט את גרף הפונקציה.

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),\, a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828\ldots$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0 : $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)'=ax^{a-1}, \qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x, \qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x, \qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x);$$
$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$
$$(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx=C;$$
$$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C;$$
$$\int\cos xdx=\sin x+C;$$
$$\int\sin xdx=-\cos x+C;$$
$$\int e^xdx=e^x+C;$$
$$\int a^xdx=\frac{1}{\ln a}a^x+C;$$
$$\int x^adx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C, a\neq-1;$$
$$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C;$$
$$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C;$$
$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$
$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות

תרגיל 1-א

$$\int \frac{7x^3+2x^2+20x-4}{x^2(x^2+4)}dx, \frac{7x^3+2x^2+20x-4}{x^2(x^2+4)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4} \to Ax(x^2+4)+B(x^2+4)+(Cx+D)x^2 =$$

$$= 7x^3+2x^2+20x-4, x=0, 4B=-4, -B=-1, (A+C)x^3 = 7x^3,$$

$$A+C=7, (B+D)x^2 = 2x^2, B+D=2, D=3, 4Ax=20x, A=5, C=2. \frac{7x^3+2x^2+20x-4}{x^2(x^2+4)} = \frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2x+3}{x^2+4},$$

$$5x(x^2+4)-(x^2+4)+(2x+3)x^2 = 5x^3+20x-x^2-4+3x^3+2x^2 = 7x^3+2x^2+20x-4.$$

$$\int \frac{7x^3+2x^2+20x-4}{x^2(x^2+4)}dx = \int (\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2x+3}{x^2+4})dx = 5\ln|x|+\frac{1}{x}+\ln(x^2+4)+\frac{3}{2}\arctan(\frac{x}{2})+C$$

תרגיל 1-ב

$$\int e^{-4x}\cdot\cos(7x)dx,\ f' = e^{-4x}, g=\cos(7x),\ f = \frac{e^{-4x}}{-4}, g' = -7\sin(7x), \int e^{-4x}\cdot\cos(7x)dx =$$

$$= \frac{e^{-4x}\cos(7x)}{-4} - \frac{7}{4}\int e^{-4x}\cdot\sin(7x)dx = \frac{e^{-4x}\cos(7x)}{-4} - \frac{7}{4}[\frac{e^{-4x}}{-4}\sin(7x) - \frac{7}{-4}\int e^{-4x}\cdot\cos(7x)dx].$$

$$I = -\frac{e^{-4x}\cos(7x)}{4} + \frac{7e^{-4x}\sin(7x)}{16} - \frac{49}{16}I, \frac{65}{16}I = -\frac{e^{-4x}\cos(7x)}{4} + \frac{7e^{-4x}\sin(7x)}{16},$$

$$I = \frac{7e^{-4x}\sin(7x)}{65} - \frac{4e^{-4x}\cos(7x)}{65} + c$$

תרגיל 2

חקור את

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

תחום הגדרה

$$f:\mathbb{R}-\{\pm 1\} \to \mathbb{R}$$

ב : נקודות חיתוך עם הצירים.

$(x=0)\leftrightarrow(y=0)$

ג : זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.

תחום ההגדרה סימטרי ו $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=\dfrac{-x^3}{x^2-1}=-f(x)$

ולכן זו פונקציה איזוגית.

ד : תחומי עליה וירידה. ה : נקודות קיצון. ו : נקודות פיתול , תחומי קמירות כלפי מעלה וקמירות כלפי מטה.

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1},\ f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2},$$

$$f''=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-x^2(x^2-3)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2-1)[(2x^2-3)(x^2-1)-2x^2(x^2-3)]}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{2x(2x^4-2x^2-3x^2+3-2x^4+6x^2)}{(x^2-1)^3}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=\frac{2x(x^2-1)(x^2+3)}{(x^2-1)^4}.$$

נקודות קריטיות עבור f' הן $\pm\sqrt{3}$,± 1, 0, וכל הנקודות הקריטיות של f'' הן גם של f'.
נביט בקטעים והקרנים הבאים $(-\infty,-\sqrt{3}),(-\sqrt{3},-1),(-1,0)(0,1)(1,\sqrt{3},)(\sqrt{3},\infty)$
לכל אחד נבחר נציג ונציב ב-f',f'' ונקבל. בקרן השמאלית f עולה ובוכה, בקטע מימינו f יורדת ובוכה, מימינו f יורדת ומחייכת, מימינו f יורדת ובוכה, מימינו f יורדת ומחייכת ובקרן השמאלית היא עולה ומחייכת. לכן $-\sqrt{3}$ נקודת קיצון מקסימום מקומי, ו $\sqrt{3}$ נקודת מקסימום מקומי. ± 1 הן נקודות מחוץ לתחום ההגדרה וקיימות בהן אסימפטוטות אנכיות. עבור אסימפטוטה משופעת ב $\pm\infty$ נקבל $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-1)}=1, b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-1x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-1}-\frac{x(x^2-1)}{x^2-1}=0$, ולכן
y=x אסימפטוטה משופעת ב $\pm\infty$.