מכללה האקדמית נתניה

מבחן אמצע באינפי ב' דוגמא

שם המרצה:
תאריך הבחינה:
משך הבחינה: <u>שעה וחצי</u>
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

<u>פתור את חמשת האינטגרלים הבאים:</u>

א. חשב $\int \frac{3x^5-2x^3+x-1}{x^3+4x}dx$

ב. חשב $\int \frac{\sin 5x}{e^{5x}}dx$

ג. חשב $\int \frac{3dx}{4\sin x+4\cos x+1}$

ד. חשב $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$

ה. חשב $\int \sin^7(-3x)\cos^5(-3x)dx$

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, a^0 = 1,$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו $0 < a, a \neq 1$.

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a \sqrt[y]{x} = \tfrac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828...$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$

$$\int \cos xdx = \sin x + C;$$

$$\int \sin xdx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S=\int_a^b (g(x)-f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V=\pi\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad \sin^2 x+\cos^2 x=1;$$

$$\tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad \tan x\cdot\cot x=1;$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\qquad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad 1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
:
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
:
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות

.א

$$\int \frac{3x^5-2x^3+x-1}{x^3+4x}dx=?,\frac{3x^5-2x^3+x-1}{x^3+4x}=3x^2-14+\frac{57x-1}{x^3+4x},\frac{57x-1}{x^3+4x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4},$$

$$57x-1=A(x^2+4)+Bx^2+Cx, C=57, A=-0.25, B=0.25, \frac{3x^5-2x^3+x-1}{x^3+4x}=$$

$$=3x^2-14-\frac{1}{4x}+\frac{x+228}{4(x^2+4)},\int \frac{3x^5-2x^3+x-1}{x^3+4x}dx=\int(3x^2-14-\frac{1}{4x}+\frac{x+228}{4(x^2+4)})dx=$$

$$=x^3-14x-\frac{\ln x}{4}+\frac{\ln(x^2+4)}{8}+\frac{57}{2}\arctan(\frac{x}{2})+C$$

.ב

$$I=\int\frac{\sin 5x}{e^{5x}}dx=\int \sin 5xe^{-5x}dx, f'=\sin 5x, f=\frac{-\cos 5x}{5}, g=e^{-5x}, g'=-5e^{-5x},$$

$$I=\frac{-\cos 5x}{5}e^{-5x}-\int\frac{-\cos 5x}{5}(-5)e^{-5x}dx=\frac{-\cos 5xe^{-5x}}{5}-\int\cos 5xe^{-5x}dx,$$

$$f'=\cos 5x, f=\frac{\sin 5x}{5}, g=e^{-5x}, g'=-5e^{-5x},$$

$$I=\frac{-\cos 5xe^{-5x}}{5}-\frac{\sin 5x}{5}e^{-5x}-\int\frac{\sin 5x}{5}(-5)e^{-5x}dx=\frac{-\cos 5xe^{-5x}}{5}-\frac{\sin 5x}{5}e^{-5x}-I,$$

$$I=\frac{-(\cos 5x+\sin 5x)e^{-5x}}{10}+C$$

.ג

$$\int\frac{3dx}{4\sin x+4\cos x+1}.t=\tan(\frac{x}{2}), dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\int\frac{3dx}{4\sin x+4\cos x+1}=\int\frac{3\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2}+4\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}=\int\frac{6dt}{8t+4(1-t^2)+1+t^2}=\int\frac{6dt}{-3t^2+8t+5}=$$

$$=-2\int\frac{dt}{t^2-(8/3)t-(5/3)}=-2\int\frac{dt}{(t-\frac{4+\sqrt{31}}{3})(t-\frac{4-\sqrt{31}}{3})},$$

$$\frac{1}{(t-\frac{4+\sqrt{31}}{3})(t-\frac{4-\sqrt{31}}{3})}=\frac{\frac{3}{2\sqrt{31}}}{t-\frac{4+\sqrt{31}}{3}}-\frac{\frac{3}{2\sqrt{31}}}{t-\frac{4-\sqrt{31}}{3}}.I=\frac{3}{\sqrt{31}}\ln|t-\frac{4-\sqrt{31}}{3}|$$

$$-\frac{3}{\sqrt{31}}\ln|t-\frac{4+\sqrt{31}}{3}|+C$$

ד.

$$I=\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}dx=\int\frac{x+1+x-1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}{(x+1)-(x-1)}dx=$$

$$=\int(x+\sqrt{x^2-1})dx=\frac{x^2}{2}+\int\sqrt{x^2-1}dx=\frac{x^2}{2}+J,\ J=\int\sqrt{x^2-1}dx=x\sqrt{x^2-1}-\int\frac{2x^2dx}{2\sqrt{x^2-1}}=x\sqrt{x^2-1}-\int\frac{(x^2-1+1)dx}{\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=x\sqrt{x^2-1}-J-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.J=\frac{x\sqrt{x^2-1}-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}}{2},I=\frac{x^2+x\sqrt{x^2-1}-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}}{2}+C,\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},t=\arcsin(1/x),$$

$$\sin(t)=1/x,x=\frac{1}{\sin(t)},dx=\frac{-\cos(t)dt}{\sin^2(t)},\cos(t)=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x},\cot(t)=\frac{\cos(t)}{\sin(t)}=\sqrt{x^2-1},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\frac{-\cos(t)dt}{\sin^2(t)}}{\cot(t)}=-\int\frac{dt}{\sin(t)}.u=\tan(\frac{t}{2}),dt=\frac{2du}{1+u^2},\sin(t)=\frac{2u}{1+u^2},$$

$$-\int\frac{dt}{\sin(t)}=-\int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}}=-\int\frac{du}{u}=-\ln|u|=-\ln|\tan(\frac{t}{2})|=-\ln|\tan(\frac{\arcsin(1/x)}{2})|.$$

$$I=\frac{x^2+x\sqrt{x^2-1}-\ln|\tan(\frac{\arcsin(1/x)}{2})|}{2}+C$$

פתרון נוסף ל-ד.

$$I=\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}}{\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}}dx=\int\frac{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}dx,t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},t^2x+t^2=x-1,x(1-t^2)=t^2+1,x=\frac{t^2+1}{1-t^2},$$

$$dx=\frac{2t(1-t^2)+2t(t^2+1)}{(1-t^2)^2}dt=\frac{4tdt}{(1-t^2)^2},I=\int\frac{1-t}{1+t}\frac{4tdt}{(1-t^2)^2}=\int\frac{4tdt}{(1-t)(1+t)^3}.\frac{4t}{(1-t)(1+t)^3}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}+\frac{C}{(1+t)^2}+\frac{D}{(1+t)^3},$$

$$4t=A(1+t)^3+B(1+t)^2(1-t)+C(1-t)(1+t)+D(1-t),A-B=0,8A=4,2D=-4,A+B+C+D=0,$$

$$A=B=0.5,D=-2,C=1,\frac{4t}{(1-t)(1+t)^3}=\frac{1}{2(1-t)}+\frac{1}{2(1+t)}+\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{2}{(1+t)^3},I=\frac{\ln|1+t|-\ln|1-t|}{2}-\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1+t)^2}+C=$$

$$=\frac{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right|}{2}-\frac{1}{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}+\frac{1}{(1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}})^2}+C=\frac{\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right|}{2}-\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}+\frac{x+1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}+C$$

ה.

$$I=\int \sin^7(-3x)\cos^5(-3x)dx=\int -\sin^7(3x)\cos^5(3x)dx=-\int \sin^7(3x)\cos^5(3x)dx\,.$$

$$t=\sin(3x), dt=3\cos(3x)dx, I=-\int \sin^7(3x)\cos^5(3x)dx=-\int t^7(1-t^2)^2\frac{dt}{3}=\frac{-1}{3}\int(t^7-2t^9+t^{11})dt=$$

$$=\frac{-1}{3}\left(\frac{t^8}{8}-\frac{t^{10}}{5}+\frac{t^{12}}{12}\right)+C=-\frac{t^8}{24}+\frac{t^{10}}{15}-\frac{t^{12}}{36}+C=-\frac{\sin^8(3x)}{24}+\frac{\sin^{10}(3x)}{15}-\frac{\sin^{12}(3x)}{36}+C$$