

המכללה האקדמית נתניה

מבחן אמצע באינפי ב' דוגמא

שם המרצה :
תאריך הבחינה :
משך הבחינה : שעה וחצי
חומר עזר : מחשבון (לא גרפי).

פתור את חמשת האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{7x^3 + 2x^2 + 20x - 4}{x^2(x^2 + 4)} dx \quad \text{א. חשב}$$

$$\int \frac{\sin 3x}{e^{2x}} dx \quad \text{ב. חשב}$$

$$\int \sin^4(7x) \cos^2(7x) dx \quad \text{ג. חשב}$$

$$\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{x - \sqrt{x+1} + 1} dx \quad \text{ד. חשב}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3} \quad \text{ה. חשב}$$

בהצלחה

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. משוואה ריבועית

$$\text{א. פתרון המשוואה } ax^2 + bx + c = 0 \text{ (} a \neq 0 \text{) הוא } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ב. פירוק הטרינום $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$\begin{aligned} a^x a^y &= a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}, \\ \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, a^0 = 1, \\ (a^x)^y &= a^{xy}, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab} \end{aligned}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו- $0 < a, a \neq 1$.

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x, \quad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828\dots$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5. הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (e^x)' = e^x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידיים

$$\int 0 dx = C;$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C;$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בנוסח אחר:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx \quad \text{א. שטח:}$$

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\varphi) d\varphi \quad \text{ב. שטח בקואורדינטות קטביות:}$$

$$V = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx \quad \text{ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x:}$$

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx \quad \text{ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y:}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad \text{ה. אורך קו:}$$

11.

א. הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta). \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta). \quad : \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}\end{aligned}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha). \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha). \\ \tan(2\alpha) &= \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}. \\ \cot(2\alpha) &= \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)}. \\ \sin^2(\alpha) &= \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}. \\ \cos^2(\alpha) &= \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}. \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}. \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}. \\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}. \\ \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.\end{aligned} \quad :$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) + \sin(\beta) &= 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right). \\ \sin(\alpha) - \sin(\beta) &= 2\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right). \\ \cos(\alpha) + \cos(\beta) &= 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right). \\ \cos(\alpha) - \cos(\beta) &= -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).\end{aligned} \quad :$$

ה. מכפלות:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}. \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}. \\ \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}. \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.\end{aligned} \quad :$$

פתרונות

א. בתרגיל $\int \frac{7x^3 + 2x^2 + 20x - 4}{x^2(x^2 + 4)} dx$ דרגת המכנה גדולה מדרגת המונה,

ולכן אפשר לגשת ישיר לשלב השברים החלקיים, ונקבל

$$\begin{aligned} \frac{7x^3 + 2x^2 + 20x - 4}{x^2(x^2 + 4)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4} \rightarrow Ax(x^2 + 4) + B(x^2 + 4) + (Cx + D)x^2 = \\ &= 7x^3 + 2x^2 + 20x - 4 \rightarrow (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + 4Ax + 4B = 7x^3 + 2x^2 + 20x - 4 \rightarrow \\ B &= -1, A = 5, D = 3, C = 2, \int \frac{7x^3 + 2x^2 + 20x - 4}{x^2(x^2 + 4)} dx = \int \left(\frac{5}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2x + 3}{x^2 + 4} \right) dx = \\ &= 5 \ln |x| + \frac{1}{x} + \ln(x^2 + 4) + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c \end{aligned}$$

ב.

$$\begin{aligned} I &= \int e^{-2x} \cdot \sin(3x) dx, f' = e^{-2x}, g = \sin(3x), f = \frac{-e^{-2x}}{2}, g'(x) = 3 \cos(3x), I = \frac{-e^{-2x} \sin(3x)}{2} \\ &+ \frac{3}{2} \int e^{-2x} \cdot \cos(3x) dx, f' = e^{-2x}, g(x) = \cos(3x), f = \frac{-e^{-2x}}{2}, g'(x) = -3 \sin(3x), I = \frac{-e^{-2x} \sin(3x)}{2} \\ &+ \frac{3}{2} \left(\frac{-e^{-2x} \cos(3x)}{2} - \int \frac{-e^{-3x}}{2} \cdot 3(-1) \sin(3x) dx \right), I = \frac{-e^{-2x} \sin(3x)}{2} - \frac{3e^{-2x} \cos(3x)}{4} - \frac{9}{4} I, \\ \frac{13}{4} I &= -\left(\frac{e^{-2x} \sin(3x)}{2} + \frac{3e^{-2x} \cos(3x)}{4} \right), I = -\left(\frac{2e^{-2x} \sin(3x)}{13} + \frac{3e^{-2x} \cos(3x)}{13} \right) + C \end{aligned}$$

ג.

$$\begin{aligned} \int \sin^4(7x) \cos^2(7x) dx, \sin^4(7x) \cos^2(7x) &= [\sin(7x) \cos(7x)]^2 \sin^2(7x) = \left(\frac{\sin(14x)}{2} \right)^2 \sin^2(7x) = \\ &= \frac{[\sin(14x) \sin(7x)]^2}{4} = \frac{[\cos(7x) - \cos(21x)]^2}{16} = \frac{\cos^2(7x) - 2 \cos(7x) \cos(21x) + \cos^2(21x)}{16} = \\ &= \frac{1 + \cos(14x) - 2(\cos(14x) - \cos(28x)) + 1 + \cos(42x)}{32} = \frac{2 - \cos(14x) + 2 \cos(28x) + \cos(42x)}{32}. \\ I &= \frac{x}{16} + \frac{\sin(28x) - \sin(14x)}{448} + \frac{\sin(42x)}{1344} + C \end{aligned}$$

.7

$$I = \int \frac{\sqrt{x+1}+2}{x-\sqrt{x+1}+1} dx = \int \frac{\sqrt{x+1}+2}{x+1-\sqrt{x+1}} dx, t = \sqrt{x+1}, dt = \frac{dx}{2t}, dx = 2t dt, I = \int \frac{t+2}{t^2-t} 2t dt = \int \frac{(2t+4)dt}{t-1}.$$

$$\frac{2t+4}{t-1} = 2 + \frac{6}{t-1}, I = 2t + 6 \ln |t-1| + C = 2\sqrt{x+1} + 6 \ln |\sqrt{x+1}-1| + C.$$

.8

$$I = \int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}, t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}. I = \int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3} =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2 \frac{2t}{1+t^2} + 3} = \int \frac{2dt}{1-t^2+4t+3(1+t^2)} = \int \frac{2dt}{2t^2+4t+2} = \int \frac{dt}{t^2+2t+1} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} + C = -\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1} + C$$