

המכללה האקדמית נתניה

מבחן אמצע באינפי ב' - דוגמא

שם המרצה : ד"ר גיורא דולה
תאריך הבחינה : יום ד כד איר התשע"ב 16-5-2012
משך הבחינה : שעה וחצי
חומר עזר : מחשבון (לא גרפי).
ענה על כל חמשת השאלות הבאות :

$$\int \frac{-x^2 + 26x - 48}{(x-3)^2(2x+1)} dx \quad .1 \quad \text{חשב}$$

$$\int \cos(\ln 2x) dx \quad .2 \quad \text{חשב}$$

$$\int \sin^4(x) \cos^3(x) dx \quad .3 \quad \text{חשב}$$

$$\int \frac{3x^7}{(2x^4 - 3)^9} dx \quad .4 \quad \text{חשב}$$

$$\int \frac{3}{\sin x + 1 + \cos x} dx \quad .5 \quad \text{חשב}$$

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2; \\(a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3, \\a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)\end{aligned}$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) הוא $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ב. פירוק הטרינום $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

3. חזקות ושורשים

$$\begin{aligned}a^x a^y &= a^{x+y}, \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \quad \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}, \\ \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, \quad a^0 = 1, \\ (a^x)^y &= a^{xy}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}\end{aligned}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו- $0 < a, a \neq 1$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x, \quad \ln x = \log_e x, \quad e = 2.718281828\dots$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5. הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (e^x)' = e^x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידיים

$$\int 0 dx = C;$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C;$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בנוסח אחר:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx \quad \text{א. שטח:}$$

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\varphi) d\varphi \quad \text{ב. שטח בקואורדינטות קטביות:}$$

$$V = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx \quad \text{ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x:}$$

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx \quad \text{ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y:}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad \text{ה. אורך קו:}$$

11.

א. הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta). \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta). \quad : \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}\end{aligned}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha). \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha). \\ \tan(2\alpha) &= \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}. \\ \cot(2\alpha) &= \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)}. \\ \sin^2(\alpha) &= \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}. \\ \cos^2(\alpha) &= \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}. \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}. \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}. \\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}. \\ \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}. \quad :\end{aligned}$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) + \sin(\beta) &= 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right). \\ \sin(\alpha) - \sin(\beta) &= 2\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right). \quad : \\ \cos(\alpha) + \cos(\beta) &= 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right). \\ \cos(\alpha) - \cos(\beta) &= -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).\end{aligned}$$

ה. מכפלות:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}. \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}. \quad : \\ \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}. \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.\end{aligned}$$

תשובות

.1

$$I = \int \frac{-x^2 + 26x - 48}{(x-3)^2(2x+1)} dx, \frac{-x^2 + 26x - 48}{(x-3)^2(2x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{D}{2x+1} \rightarrow$$

$$\rightarrow A(x-3)(2x+1) + B(2x+1) + D(x-3)^2 = -x^2 + 26x - 48, 7B = 21, 12.25D = -61.25, \\ B = 3, D = -5, -3A + B + 9D = -48, 3A = 48 + 3 - 45 = 6, A = 2,$$

$$I = 2 \ln|x-3| - \frac{3}{x-3} - \frac{5 \ln(2x+1)}{2} + C$$

.2

$$I = \int \cos(\ln 2x) dx = \int 1 \cos(\ln 2x) dx, f' = 1, g = \cos(\ln 2x), f = x, g' = \frac{-\sin(\ln 2x)}{4x},$$

$$I = x \cos(\ln 2x) + \int \frac{x \sin(\ln 2x)}{4x} dx = x \cos(\ln 2x) + \frac{1}{4} \int \sin(\ln 2x) dx = x \cos(\ln 2x) +$$

$$+ \frac{1}{4} (x \sin(\ln 2x) - \frac{1}{2} \int \frac{x \cos(\ln 2x)}{2x} dx), I = x \cos(\ln 2x) + \frac{1}{4} x \sin(\ln 2x) - \frac{I}{16},$$

$$\frac{17I}{16} = \frac{4x \cos(\ln 2x) + x \sin(\ln 2x)}{4}, I = \frac{64x \cos(\ln 2x) + 16x \sin(\ln 2x)}{17}$$

.3

$$I = \int \sin^4(x) \cos^3(x) dx, u = \sin(x), \cos^2(x) = 1 - u^2, du = \cos(x) dx, I = \int \sin^4(x) \cos^3(x) dx =$$

$$= \int \sin^4(x) \cos^2(x) \cos(x) dx = \int u^4 (1 - u^2) du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c = \frac{(\sin(x))^5}{5} - \frac{(\sin(x))^7}{7} + c$$

.4

$$\int \frac{3x^7}{(2x^4 - 3)^9} dx, u = 2x^4 - 3, du = 8x^3 dx, \int \frac{3x^7 dx}{(2x^4 - 3)^9} = \int \frac{(3x^7 - 4.5x^3 + 4.5x^3) dx}{(2x^4 - 3)^9} =$$

$$= \int \frac{(3x^7 - 4.5x^3) dx}{(2x^4 - 3)^9} + \int \frac{4.5x^3 dx}{(2x^4 - 3)^9} = 1.5 \int \frac{(2x^7 - 3x^3) dx}{(2x^4 - 3)^9} + \int \frac{4.5x^3 dx}{(2x^4 - 3)^9} =$$

$$= 1.5 \int \frac{x^3(2x^4 - 3) dx}{(2x^4 - 3)^9} + \int \frac{4.5x^3 dx}{(2x^4 - 3)^9} = 1.5 \int \frac{x^3 dx}{(2x^4 - 3)^8} + \int \frac{4.5x^3 dx}{(2x^4 - 3)^9} = 1.5 \int \frac{du}{u^8} + \int \frac{4.5 du}{u^9} =$$

$$= \frac{3}{16} \frac{1}{-7u^7} + \frac{9}{16} \frac{1}{-8u^8} + c = \frac{-3}{112u^7} - \frac{9}{128u^8} + c = \frac{-3}{112(2x^4 - 3)^7} - \frac{9}{128(2x^4 - 3)^8} + c$$

.5

$$I = \int \frac{3}{\sin x + 1 + \cos x} dx, t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$I = \int \frac{3}{\frac{2t}{1+t^2} + 1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{6dt}{2t+1+t^2+1-t^2} = 3 \int \frac{dt}{t+1} = 3 \ln|t+1| + c = 3 \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right| + c$$