

מבחן סוף באינפי ב למדעי המחשב תלמידי הנדסאים-

סמסטר קיץ התשע"ג מועד א, יום ד, יט חשון התשע"ד 23-10-2013

- מורה : גיורא דולה.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבוניים
- התשובות לכל השאלות תכתבנה במחברות.
- ענה על כל השאלות הבאות

בהצלחה.

580242451 עמותת רשומה

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

- בשאלה ראשונה יש לענות על סעיף א או סעיף ב, וכן לענות על סעיף ג.
1. (20%) א. נסח והוכח את המבחן האינטגרלי להתכנסות טורים חיוביים.
ב. הראה כי עבור טורים משפט אבל ומשפט לייבניץ נובעים ממשפט דיריכלה.

ג. בדוק התכנסות הטור הבא:
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)}$$

2. חשב את האינטגרל הבא: (10%)

$$\int \frac{6x^2 - 24x + 48}{(x^2 - 16)(x - 2)} dx$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות: (10%)
 $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 8$ ו $g(x) = 3x^3 + 5x^2 - 8$

4. חשב את אורך הקשת של העקומה $2x^2y = -3 - \frac{1}{24}x^6$ בתחום: $3 \leq x \leq 5$. (10%)

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: (10%)
נמק.
$$\int_4^{\infty} \frac{x^{10}}{e^{3x}} \sin\left(\frac{2x}{3}\right) dx$$

6. בדוק התכנסות ארבעה מבין חמשת הטורים הבאים. נמק. (40%)

א:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2.6)^n n!}{3 \cdot n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{4n}}$$

ב :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdots (2n-1)^3}{2^3 \cdot 4^3 \cdot 6^3 \cdots (2n)^3}$$

ג :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(7n^{100})}{n^5 \cdot 5^n}$$

ד :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\tan(n)^2 + 1)}$$

ה :

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) הוא $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ב. פירוק הטרינום $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, a^0 = 1,$$

$$(a^x)^y = a^{xy}, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה- \log : $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ | $0 < a, a \neq 1$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x, \quad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828\dots$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5. הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (e^x)' = e^x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידיים

$$\int 0 dx = C;$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C;$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx;$$

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx;$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנוסח אחר:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א. שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2} \int_a^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

11.

א. הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta). \quad :$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}. \quad :$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right). \quad :$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

ה. מכפלות:

580242451 עמותה רשומה

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

פתרונות

תרגיל 1-ג

ברור ש f' שלילית עבור כל x חיובי ושגבולה הוא 0 כאשר x שואף לאינסוף ולכן מותר להשתמש במבחן האינטגרל, ובנוסף

$$f(x) = \frac{1}{(x+1) \cdot \ln(x+1)}, f'(x) = \frac{-\left(\frac{x+1}{x+1} + \ln(x+1)\right)}{\left((x+1) \cdot \ln(x+1)\right)^2} = \frac{-(1 + \ln(x+1))}{\left((x+1) \cdot \ln(x+1)\right)^2}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \cdot \ln(x+1)} = ?, t = \ln(x+1), dt = \frac{dx}{x+1}, \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \cdot \ln(x+1)} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t} = \ln(\infty) - \ln(\ln(2)) = \infty$$

ולכן הטור והאינטגרל לא מתכנסים.

תרגיל 2

$$\int \frac{6x^2 - 24x + 48}{(x^2 - 16)(x - 2)} dx, \frac{6x^2 - 24x + 48}{(x^2 - 16)(x - 2)} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 4} + \frac{D}{x - 2},$$

$$A(x + 4)(x - 2) + B(x - 4)(x - 2) + D(x^2 - 16) = 6x^2 - 24x + 48, x = 4, 16A = 48, A = 3,$$

$$x = -4, 48B = 240, B = 5, x = 2, -12D = 24, D = -2. I = 3 \ln|x - 4| + 5 \ln|x + 4| - 2 \ln|x - 2| + C$$

תרגיל 3

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 8 = g(x) = 3x^3 + 5x^2 - 8 \rightarrow x^4 - 5x^3 - 6x^2 = 0, \rightarrow x^2(x+1)(x-6) = 0, f(1) = -10 < g(1) = 0.$$

$$(f-g)\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{16} + \frac{5}{8} - \frac{6}{4} = \frac{1+10-24}{16} < 0 \rightarrow f(-0.5) < g(-0.5). S = \int_{-1}^5 (6x^2 + 5x^3 - x^4) dx = \left(2x^3 + \frac{5x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right) \Big|_{-1}^5$$

$$= 252 + \frac{5(625-1)}{4} - \frac{3125+1}{5} = 252 + 780 - 625 - \frac{1}{5} = 401.8$$

תרגיל 4

$$2x^2y = -3 - \frac{1}{24}x^6 \rightarrow y = -\frac{3}{2x^2} - \frac{x^4}{48}, y' = \frac{3}{x^3} - \frac{x^3}{12}, (y')^2 = \frac{9}{x^6} + \frac{x^6}{144} - \frac{1}{2}, (y')^2 + 1 = \frac{9}{x^6} + \frac{x^6}{144} + \frac{1}{2} =$$

$$= \left(\frac{3}{x^3} + \frac{x^3}{12}\right)^2, l = \int_3^5 \left(\frac{3}{x^3} + \frac{x^3}{12}\right) dx = -\frac{3}{2x^2} + \frac{x^4}{48} \Big|_3^5 = \frac{625-81}{48} - \frac{3}{50} + \frac{1}{6} = \frac{13600-72+200}{1200} = \frac{13728}{1200} = \frac{853}{75}$$

נשתמש בכלל דיריכלה עבור

תרגיל 5

אז . $g(x) = \sin\left(\frac{2x}{3}\right)$ ועבור $f(x) = \frac{x^{10}}{e^{3x}}$ נשתמש בכלל דיריכלה עבור $\int_1^{\infty} \frac{x^{10}}{e^{3x}} \sin\left(\frac{2x}{3}\right) dx$

$$3.3 < x \text{ ולכן } f \text{ יורדת עבור } f(x) = \frac{x^{10}}{e^{3x}}, f'(x) = \frac{10x^9 e^{3x} - 3e^{3x} x^{10}}{e^{6x}} = \frac{x^9 e^{3x} (10-3x)}{e^{6x}} = \frac{x^9 (10-3x)}{e^{3x}}.$$

ברור כי $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{10}}{e^{3x}} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10!}{3^{10} e^{3x}} = 0$. כעת נבדוק את תנאי החסימות עבור g .

$$\int_a^b \sin\left(\frac{2x}{3}\right) dx = -\frac{3 \cos\left(\frac{2x}{3}\right)}{2} \Big|_a^b = -\frac{3 \cos\left(\frac{2b}{3}\right)}{2} + \frac{3 \cos\left(\frac{2a}{3}\right)}{2} \cdot \left| \int_a^b \sin\left(\frac{2x}{3}\right) dx \right| \leq \frac{3(1+1)}{2} = 3.$$

תרגיל 6-א

אז ונשתמש בכלל המנה, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2.6)^n n!}{3 \cdot n^n}$

$$a_n = \frac{(2.6)^n n!}{3 \cdot n^n}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2.6)^{n+1} (n+1)!}{3 \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{3 \cdot n^n}{(2.6)^n n!} = \frac{(2.6)(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(2.6)n^n}{(n+1)^n} = \frac{(2.6)}{(1+1/n)^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2.6}{e} < 1$$

והטור מתכנס.

תרגיל 6-ב

$$\text{הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{4n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{4n} = e^L, L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} - 1\right)4n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{2n+1}\right)4n = 4, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{e^4} > 0$$

מתבדר כי האיבר הכללי איננו שואף ל-0.

תרגיל 6-ג

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdots (2n-1)^3}{2^3 \cdot 4^3 \cdot 6^3 \cdots (2n)^3}, a_n &= \frac{1^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdots (2n-1)^3}{2^3 \cdot 4^3 \cdot 6^3 \cdots (2n)^3}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdots (2n-1)^3 (2n+1)^3}{2^3 \cdot 4^3 \cdot 6^3 \cdots (2n)^3 (2n+2)^3} \cdot \frac{2^3 \cdot 4^3 \cdot 6^3 \cdots (2n)^3}{1^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdots (2n-1)^3} = \\ &= \frac{(2n+1)^3}{(2n+2)^3}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n \left(\frac{(2n+2)^3}{(2n+1)^3} - 1\right) = n \left(\frac{(2n+2)^3 - (2n+1)^3}{(2n+1)^3}\right) = \\ &= n \left(\frac{(8n^3 + 24n^2 + 24n + 8) - (8n^3 + 12n^2 + 6n + 1)}{(2n+1)^3}\right) = \frac{12n^3 + 18n^2 + 7n}{(2n+1)^3}, \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{3}{2} > 1 \end{aligned}$$

תרגיל 6-ד

$$\text{איברי הסדרה בערך } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(7n^{100})}{n^5 \cdot 5^n} \cdot a_n = (-1)^n \frac{\cos(7n^{100})}{n^5 \cdot 5^n}, |a_n| = \left| \frac{\cos(7n^{100})}{n^5 \cdot 5^n} \right| = \frac{1}{n^5 \cdot 5^n} \leq \frac{1}{5^n}$$

מוחלט קטנים מאיברי הסדרה של טור מתכנס, ולכן הטור הנידון מתכנס בהחלט.

תרגיל 6-ה

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\tan(n)^2 + 1)} \cdot \text{לפי הזהות } \tan^2(n) + 1 &= \frac{1}{\cos^2(n)} \text{ נקבל את הטור} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)^2}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n) + 1}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \\ \text{מבחן דיריכלה לטורים, עם } a_n &= \frac{1}{2n} \text{ יורדת ל-0 ו } b_n = \sin(2n) \text{ שהיא בעלת טור חסום.} \end{aligned}$$

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא
כדי לבדוק את החסימות נביט בזהויות הבאות:

$$\begin{aligned} \sin(2n) \sin(1) &= \frac{\cos(2n-1) - \cos(2n+1)}{2} \rightarrow \sum_{n=k}^l \sin(2n) = \frac{1}{\sin(1)} \sum_{n=k}^l \sin(2n) \sin(1) = \\ &= \frac{1}{2\sin(1)} \sum_{n=k}^l \cos(2n-1) - \cos(2n+1) = \frac{\cos(2k-1) - \cos(2l+1)}{2\sin(1)}, \left| \sum_{n=k}^l \sin(2n) \right| \leq \\ &\leq \frac{|\cos(2k-1)| + |\cos(2l+1)|}{2\sin(1)} \leq \frac{2}{2\sin(1)} = \frac{1}{\sin(1)} \end{aligned}$$