המכללה האקדמית נתניה

מבחן באינפי ב' כתת הנדסאים התשע"א מועד א

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה
תאריך הבחינה: יום ג יג תשרי התשע"ב 11-10-2001
משך הבחינה: שלוש שעות
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. א. <u>נסח **והוכח**</u> את מבחן <u>ראבה</u>. (20%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: (בכל דרך שתבחר):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(e+1)(e+2)(e+3)\cdots(e+n)}$$

2. מצא את הגבול הבא: (10%)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{\sqrt{n^4-n^2}}+\frac{5n}{\sqrt{n^4-4n^2}}+\frac{5n}{\sqrt{n^4-9n^2}}+\cdots+\frac{5n}{\sqrt{n^4-n^4}}\right)$$

3. חשב את אורך העקומה $8x^2y=x^6+2$ בתחום $2\le x\le 4$ (10%)

4. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות: (10%)

$$f(x)=x^4-5x^3+7x^2+3 \quad \text{ו} \quad g(x)=x^3-x^2+3$$

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: $\int_1^{\infty}\frac{\ln^2 x\cdot\sin(\frac{x}{3})}{\sqrt{x}}dx$ נמק. (10%)

6. ענה על ארבעה מתוך חמשת הסעיפים הבאים. בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק . (40%)

א: $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2.5^n n!}{n^n}$$

ב: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}e^{\sqrt[3]{n}}}$$

ג: $$\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{\ln(\sqrt{n})}$$

ד: $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin^3(n!)\cdot\ln n}{n^3\cdot\sqrt{n}}$$

ה: $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{5n+2}\right)^{2011}$$

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),\, a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828\ldots$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0 : $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)'=ax^{a-1},\qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$
$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$
$$.(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:
$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$
אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:
$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:
$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$
$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$:
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha + \beta}{2})\cos(\frac{\alpha - \beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha - \beta}{2})\cos(\frac{\alpha + \beta}{2}).$$:
$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha + \beta}{2})\cos(\frac{\alpha - \beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha + \beta}{2})\sin(\frac{\alpha - \beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$:
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

תשובה 1-ב

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n = \frac{n!}{(e+1)(e+2)(e+3)\cdots(e+n)}, \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$
$$= \frac{(n+1)!}{(e+1)(e+2)(e+3)\cdots(e+n)(e+n+1)} \frac{(e+1)(e+2)(e+3)\cdots(e+n)}{n!} = \frac{n+1}{e+n+1}, \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$
$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = n(\frac{e+n+1}{n+1} - 1) = \frac{ne}{n+1}, \lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = e.$$

לכן הטור מתכנס לפי מבחן ראבה גבול.

תשובה 2

$$\lim_{n\to\infty} a_n, a_n = \frac{5n}{\sqrt{n^4 - n^2}} + \frac{5n}{\sqrt{n^4 - 4n^2}} + \frac{5n}{\sqrt{n^4 - 9n^2}} + \cdots + \frac{5n}{\sqrt{n^4 - n^4}}$$
$$=$$
$$= \frac{5n}{\sqrt{n^4(1-(1/n)^2)}} + \frac{5n}{\sqrt{n^4(1-(2/n)^2)}} + \frac{5n}{\sqrt{n^4(1-(3/n)^2)}} + \cdots + \frac{5n}{\sqrt{n^4(1-(n/n)^2)}} =$$
$$= \frac{5}{n}(\frac{1}{\sqrt{1-(1/n)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(2/n)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1-(n/n)^2}}), \lim_{n\to\infty} a_n = 5\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 5\arcsin(1) - 5\arcsin(0) =$$
$$= \frac{5\pi}{2} - 0 = \frac{5\pi}{2}.$$

תשובה 3

$$8x^2 y = x^6 + 2 \rightarrow y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}, y' = \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2x^3}, (y')^2 = \frac{x^6}{4} + \frac{1}{4x^6} - \frac{1}{2}, (y')^2 + 1 = \frac{x^6}{4} + \frac{1}{4x^6} + \frac{1}{2} =$$
$$= (\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x^3})^2, l = \int_2^4 (\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x^3})dx = (\frac{x^4}{8} - \frac{1}{x^2})\Big|_2^4 = \frac{256-16}{8} - (\frac{1}{16} - \frac{1}{4}) = \frac{480+4-1}{16} = \frac{483}{16}$$

תשובה 4

$$f(x)=x^4-5x^3+7x^2+3, g(x)=x^3-x^2+3,\ f=g\to x^4-5x^3+7x^2+3=x^3-x^2+3\to x^4-6x^3+8x^2=0,$$

$$\to x^2(x-2)(x-4)=0\to x=0,2,4, g(1)=3< f(1)=6,\ f(3)=12<g(3)=21, S=\int_0^2(x^4-6x^3+8x^2)dx+$$

$$-\int_2^4(x^4-6x^3+8x^2)dx, h(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{2}+\frac{8x^3}{3}, S=2h(2)-h(4)-h(0)=$$

$$=2(\frac{32}{5}-24+\frac{64}{3})-(\frac{1024}{5}-384+\frac{256}{3})-0=\frac{64-1024}{5}+\frac{128-256}{3}+336=336-\frac{2880+384}{15}=$$

$$=336-\frac{3264}{15}=\frac{5040-3264}{15}=\frac{1776}{15}=118+\frac{6}{15}$$

תשובה 5

נביט ב $\int_1^\infty \frac{\ln^2 x\cdot\sin(\frac{x}{3})}{\sqrt{x}}dx$ ונגדיר $f(x)=\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}, g(x)=\sin(\frac{x}{3})$. אז מתקיים כי

$f(x)=\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}, f'(x)=\frac{\frac{2\ln x}{x}-\frac{\ln^2 x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\ln x}{2x^2}(4-\sqrt{x}\ln(x)).$ כלומר, עבור $16<x$ מתקיים $4<\sqrt{x}, 1<\ln(x)$, כלומר עבור $16<x$ מתקיים $f'<0$ ולכן f יורדת. בנוסף

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{\sqrt{x}}=0.$, כלומר f יורדת ל-0. בנוסף מתקיים כי

$\int_0^a g(x)dx=\int_0^a\sin(\frac{x}{3})dx=\left.\frac{-\cos(\frac{x}{3})}{3}\right|_0^a=\frac{1-\cos(\frac{a}{3})}{3}, |\int_0^a g(x)dx|\le\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3}\le 1$, כלומר

האינטגרל חסום לכל a על ידי החסמים ±1, ולכן מתקיימים תנאי משפט דיריכלה אודות f ו-g ולכן האינטגרל מתכנס.

תשובה 6

סעיף א נתחיל עם מבחן ד׳אלמברט

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2.5^n n!}{n^n},\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2.5^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{2.5^n n!}=\frac{2.5}{(1+\frac{1}{n})^n},\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2.5}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2.5}{e}<1$$

לכן הטור מתכנס.

ב: נשים לב כי $\sqrt[3]{n}$ עולה וחיובית, ולכן גם הפונקציות המתקבלות ממנה על ידי העלאה ברבוע $\sqrt[3]{n^2}$ וגם על ידי העלאה $e^{\sqrt[3]{n}}$ בחזקה הן עולות וחיוביות ולכן גם מכפלתן עולה וחיובית, ולכן הסדרה של הטור היא סדרה חיובית יורדת. ברור שהגבול של הסדרה הוא 0. לכן אפשר להשתמש במבחן האינטגרל כדי לבדוק את התכנסות הטור. ואכן

$$\int_1^a\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}e^{\sqrt[3]{x}}}=?,u=\sqrt[3]{x},du=\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}\to\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=3du\to\int_1^a\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}e^{\sqrt[3]{x}}}=\int_1^{\sqrt[3]{a}}\frac{3du}{e^u}=-3e^{-u}\Big|_1^{\sqrt[3]{a}}=3(1-\frac{1}{e^{\sqrt[3]{a}}}),$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_1^a\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}e^{\sqrt[3]{x}}}=3(1-0)=3.$$

מכיון שהאינטגרל מתכנס גם הטור מתכנס.

ג: נביט על מבחן ההשואה $0<\ln(\sqrt{n})<\ln(n)<n\to 0<\frac{1}{n}<\frac{1}{\ln(\sqrt{n})}$ ולכן נובע כי הטור גדול מטור מתבדר ולכן מתבדר בעצמו.

ד: נביט על סדרת הערכים המוחלטים של הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin^3(n!)\cdot\ln n}{n^3\cdot\sqrt{n}}$ אז מתקיים

$|\frac{\sin^3(n!)\cdot\ln n}{n^3\cdot\sqrt{n}}|\le\frac{\ln n}{n^3\cdot\sqrt{n}}\le *\le\frac{1}{n^3}$ וכדי להוכיח את אי השויון * נשים לב כי

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$ ולכן סדרת הערכים המוחלטים קטנה מסדרה חיובית של טור מתכנס, לכן הטור מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

ה: נביט בסדרת הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n+5}{5n+2})^{2011}$. אז מתקיים כי

$\lim_{n\to\infty}(\frac{2n+5}{5n+2})^{2011}=(\frac{2}{5})^{2011}>0$ ולכן לא מתקיים המשפט הדורש כי גבול הסדרה המקורית חייב להיות 0, לכן הטור מתבדר.