המכללה האקדמית נתניה

מבחן באינפי ב' מועד א' כתת הנדסאים שנת התשע"ב

שם המרצה : ד"ר גיורא דולה
תאריך הבחינה : **יום ו,ג חשון התשע"ג** 19-10-2012
משך הבחינה : שלוש שעות
חומר עזר : מחשבון (לא גרפי).

<u>ענה על כל השאלות הבאות :</u>

1. א. נסח **<u>והוכח</u>** את המבחן האינטגרלי להתכנסות טורים חיוביים (10%)
מותר להסתמך על כל טענה או משפט אחרים שלמדנו בכתה מבלי להוכיח אותם,
אבל יש לנסח אותם במדויק לפני או אחרי ההוכחה.

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: (בכל דרך שתבחר) :

$$\sum_{n=7}^{\infty}\frac{5}{n\cdot\ln^3 n} \quad (8\%)$$

2. מצא את הגבול הבא : (10%)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3\cdot 1^2}{n^3}}{1+\frac{1^3}{n^3}}+\frac{\frac{3\cdot 2^2}{n^3}}{1+\frac{2^3}{n^3}}+\frac{\frac{3\cdot 3^2}{n^3}}{1+\frac{3^3}{n^3}}+\cdots+\frac{\frac{3\cdot n^2}{n^3}}{1+\frac{n^3}{n^3}}\right)$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות :
$f(x)=x^3-8x+2$ ו $g(x)=3x^2+10x+2$ (10%)

4. חשב את אורך הקשת של העקומה $2=(3y)^{\frac{2}{3}}-x^2$ (10%)
בתחום : $1\le x\le 3$.

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא : $\int_1^\infty x^8 e^{-2x}\cos(\frac{x}{3})dx$ נמק.

(10%)

6. ענה על ארבעת הסעיפים הבאים. בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק . (32%)

א : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

ב : $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{7}{(1+\frac{7}{n})^n}$

ג : $\sum_{n=2}^{\infty}5^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})}$

ד : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\cdot\cos(n^{n+1})}{n^3+7n+3}$

7. הוכח כי אם f פונקציה רציפה בקטע [a,b] ו-g- מוגדרת על ידי האינטגרל הבא :

$g(x)=\int_a^x f(t)dt$ אז g גזירה ונגזרתה שווה f. (10%)

מותר להסתמך על כל טענה או משפט אחרים שלמדנו בכתה מבלי להוכיח אותם, אבל יש לנסח אותם במדויק לפני או אחרי ההוכחה.

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ הוא $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, a^0 = 1,$$
$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו $0 < a, a \neq 1$.

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$
$$\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a \sqrt[y]{x} = \tfrac{1}{y} \cdot \log_a x;$$
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x} = x, \qquad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828\ldots$$
$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)'=ax^{a-1}, \qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x, \qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x, \qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x);$$
$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$
$$.(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח :

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V=\pi\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

11.

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right), \qquad \sin^2 x+\cos^2 x=1;$$

$$\tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right), \qquad \tan x\cdot\cot x=1;$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

:

$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

:

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות

ב-1

$$\sum_{n=7}^{\infty}\frac{5}{n\cdot\ln^3 n},\ f(x)=\frac{5}{x\cdot\ln^3 x},\ f'(x)=-\frac{5(\ln^3 x+3x\frac{1}{x}\ln^2 x)}{x^2\cdot\ln^6 x}=-\frac{5(\ln^3 x+3\ln^2 x)}{x^2\cdot\ln^6 x}<0,$$

$$,\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{5}{\infty\cdot\ln^3\infty}=\frac{5}{\infty}=0, I=\int_7^{\infty}\frac{5}{x\cdot\ln^3 x}dx=?, u=ln(x), I=\int_{\ln 7}^{\infty}\frac{5}{u^3}du=\frac{-5}{2u^2}\Big|_{\ln 7}^{\infty}=\frac{5}{2(\ln 7)^2}-0.$$

ולכן הטור מתכנס לפי מבחן האינטגרל.

-2

$$\left(\frac{\frac{3\cdot 1^2}{n^3}}{1+\frac{1^3}{n^3}}+\frac{\frac{3\cdot 2^2}{n^3}}{1+\frac{2^3}{n^3}}+\frac{\frac{3\cdot 3^2}{n^3}}{1+\frac{3^3}{n^3}}+\cdots+\frac{\frac{3\cdot n^2}{n^3}}{1+\frac{n^3}{n^3}}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{\frac{3\cdot 1^2}{n^2}}{1+\frac{1^3}{n^3}}+\frac{\frac{3\cdot 2^2}{n^2}}{1+\frac{2^3}{n^3}}+\frac{\frac{3\cdot 3^2}{n^2}}{1+\frac{3^3}{n^3}}+\cdots+\frac{\frac{3\cdot n^2}{n^2}}{1+\frac{n^3}{n^3}}\right)=\frac{1}{n}\frac{\sum_{k=1}^{n}3(\frac{k}{n})^2}{1+\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^3}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3\cdot 1^2}{n^3}}{1+\frac{1^3}{n^3}}+\frac{\frac{3\cdot 2^2}{n^3}}{1+\frac{2^3}{n^3}}+\frac{\frac{3\cdot 3^2}{n^3}}{1+\frac{3^3}{n^3}}+\cdots+\frac{\frac{3\cdot n^2}{n^3}}{1+\frac{n^3}{n^3}}\right)=\int_0^1\frac{3x^2}{1+x^3}dx=\ln(1+x^3)_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$$

.3

תשובה

$$f(x)=x^3-8x+2=g(x)=3x^2+10x+2\to x^3-3x^2-18x=0\to x(x-6)(x+3)=0,$$
$$f(-1)=-1+8+2=9, g(-1)=3-10+2=-5,\ f(-1)>g(-1),\ f(1)=1-8+2=-5$$
$$, g(1)=3+10+2=15, g(1)>f(1), S=\int_{-3}^{0}(x^3-3x^2-18x)dx+\int_0^6(18x-3x^2-x^3)dx,$$
$$H=\frac{x^4}{4}-x^3-9x^2, S=H(0)-H(-3)-H(6)+H(0)=-H(-3)-H(6)=$$
$$-(\frac{81}{4}+27-81)-(\frac{1296}{4}-216-324)=\frac{216-81}{4}+216=216+\frac{135}{4}=349.75.$$

תשובה 4

$$2=(3y)^{\frac{2}{3}}-x^2 \to y=\frac{(2+x^2)^{1.5}}{3}, y'=\frac{2x(2+x^2)^{0.5}}{2}, (y')^2=x^2(2+x^2), (y')^2+1=x^4+2x^2+1=$$

$$=(x^2+1)^2, l=\int_1^3 (x^2+1)dx=(\frac{x^3}{3}+x)\Big|_1^3=\frac{27-1}{3}+3-1=10.$$

.5

$$\int_1^\infty \frac{x^8\cdot\cos(\frac{x}{3})}{e^{2x}}dx,\ f=\frac{x^8}{e^{2x}}, g=\cos(\frac{x}{5}), \int_0^x \cos(\frac{t}{5})dt=5\sin(\frac{t}{5})\Big|_0^x=5\sin(\frac{x}{5})-5\sin(0), \left|\int_0^x \sin(\frac{t}{5})dt\right|\le 5,$$

$$f'=\frac{8x^7}{e^{2x}}-\frac{2x^8}{e^{2x}}=\frac{2x^7(4-x)}{e^{2x}}, (f'<0)\leftrightarrow(4<x), \lim_{x\to\infty} f=\lim_{x\to\infty}\frac{8x^7}{2e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{56x^6}{4e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{336x^5}{8e^{2x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1680x^4}{16e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6720x^3}{32e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{20160x^2}{64e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{40320x}{128e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{40320}{256e^{2x}}=0.$$

תשובה 6

א:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}.\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=0.25<1$$

הטור מתכנס לפי מבחן המנה.

ב:

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{7}{(1+\frac{7}{n})^n}, \lim_{n\to\infty}\frac{7}{(1+\frac{7}{n})^n}=\frac{7}{e^7}\ne 0$$ הטור מתבדר.

ג:

$$\sum_{n=2}^\infty 5^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})}, \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{5^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})}}{5^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})}}=5^{-\frac{1}{n}}.\lim_{n\to\infty}5^{-\frac{1}{n}}=5^0=1.\lim_{n\to\infty}(n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1))=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{5^x-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5^x\ln 5}{1}=\ln 5>1$$

הטור מתכנס לפי מבחן ראבה.

ד:

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n\frac{n\cdot\cos(n^{n+1})}{n^3+7n+3}, |a_n|=\frac{n\cdot|\cos(n^{n+1})|}{n^3+7n+3}\le\frac{n}{n^3+7n+3}.\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^3+7n+3}}{\frac{1}{n^2}}=1$$

טור הערכים המוחלטים קטן מטור אשר מתכנס לפי מבחן הגבול, לכן הטור המקורי מתכנס בהחלט.