המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף בקורס אינפיב-כתת הנדסאים סמסטר קיץ, מועד ב.

יום ד, ד כסלו התשע"ה 26-11-2014

- מורה : גיורא דולה.
- משך המבחן שלוש שעות.
- מותר להשתמש במחשבונים לא מדעיים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- יש לנמק את כל החשובים.
- המבחן כולל 9 שאלות.
- שאלות 1 סעיף א, 8ו הן שאלות הוכחה בנות משקל של 10 נקודות כ"א. כל סעיף אחר משקלו 8 נקודות.

בהצלחה.

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. א. נסח **<u>והוכח</u>** את מבחן ראבה (גרסת האיברים) להתכנסות טורים חיוביים.
. (10%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(e^2+1)(e^2+2)(e^2+3)\cdots(e^2+n)}$ (8%)

2. חשב את האינטגרל הבא: (8%)

$$\int\frac{x^2-x+3}{(x+1)^3}dx$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות: (8%)

$f(x)=2x^4+4x^3-7$ ו $g(x)=5x^3+x^2-7$

4. חשב את אורך הקשת של העקומה $y=\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2x^2}$ בתחום $4\le x\le 5$
(8%)
.

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: $\int_1^{\infty}\frac{\sin(5x)}{x\ln x}dx$ נמק. (8%)

6. מצא את הגבול הבא: (8%)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^7+2^7+3^7+\cdots+n^7}{n^8}\right)$$

7. בדוק התכנסות ארבעה מתוך חמשת הטורים הבאים. נמק . (32%)

א: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

ב: $$\sum_{n=2}^{\infty}n^2\cdot\sin^3\frac{1}{n}$$

ג: $$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2+5}\right)^{n^3}$$

ד: $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(n!)\sqrt{n}}{n^2\cdot\ln n}$$

ה. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^2}{2n}$$

8. הוכח כי אם לפונקציה f קים אינטגרל בקטע [a,b] אז f חסומה בקטע (10%).

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x, e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)'=ax^{a-1},\qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$(a\cdot f(x))' = a\cdot f'(x);$
$(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x);$
$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$
$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$.
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$
$(f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C;$$
$$\int \cos xdx = \sin x + C;$$
$$\int \sin xdx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a\neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x)\pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

:

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

:

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

:

תשובות

ב-1

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(e^2+1)(e^2+2)(e^2+3)\cdots(e^2+n)}$ נשתמש במבחן ד'אלמברט אז

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)!}{(e^2+1)(e^2+2)(e^2+3)\cdots(e^2+n)(e^2+n+1)}}{\frac{n!}{(e^2+1)(e^2+2)(e^2+3)\cdots(e^2+n)}}=\frac{n+1}{e^2+n+1}.\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ נעבור

$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n(\frac{e^2+n+1}{n+1}-1)=\frac{ne^2}{n+1}.\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=e^2>1$ למבחן ראבה

הטור מתכנס לפי מבחן ראבה.

.2

$$\frac{x^2-x+3}{(x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3},x^2-x+3=A(x+1)^2+B(x+1)+C.$$

$$(x=-1)\to C=5,Ax^2+x(2A+B)+5=x^2-x+3,A=1,B=-3,\frac{x^2-x+3}{(x+1)^3}=\frac{1}{x+1}+\frac{-3}{(x+1)^2}+\frac{5}{(x+1)^3}$$

$$\int\frac{x^2-x+3}{(x+1)^3}dx=\ln|x+1|+\frac{3}{x+1}+\frac{-5}{2(x+1)^2}+C$$

3

$$f(x)=2x^4+4x^3-7=g(x)=5x^3+x^2-7\to f-g=2x^4-x^3-x^2=0,x^2(x-1)(2x+1)=0,$$

$$x=-0.5,0,1,(f-g)(-0.25)<0,(f-g)(0.5)<0,A=\int_{-0.25}^{0.5}(g-f)dx.$$

$$\int(g-f)dx=(1/4)x^4+(1/3)x^3-(2/5)x^5=h(x).A=h(0.5)-h(0.25)=$$

$$=[(1/64)+(1/24)-(1/80)]-[(1/1024)-(1/192)+(1/2560)]=$$

$$=\frac{(15+40-12)}{960}-\frac{(15-80+6)}{15360}=\frac{43}{960}-\frac{-59}{15360}=\frac{43\cdot16+59}{15360}=\frac{43\cdot16+59}{15360}=\frac{688+59}{15360}=\frac{747}{15360}=\frac{249}{5120}.$$

.4 חשב את אורך הקשת של העקומה $y=\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2x^2}$ בתחום $4\le x\le 5$

$$y=\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2x^2}\to y'=\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{4x^3},(y')^2=\frac{1}{16}x^6+\frac{1}{16x^6}-\frac{1}{2},\sqrt{(y')^2+1}=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4x^3},$$

$$\int\sqrt{(y')^2+1}dx=\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2x^2}=L(x),L(5)-L(4)=(\frac{625-256}{16}-\frac{1}{50}+\frac{1}{32})=\frac{738-160+25}{800}=\frac{603}{800}.$$

5

$$\int_1^\infty \frac{\sin(5x)}{x\ln x}dx=?,\ f(x)=\frac{1}{x\ln x},g(x)=\sin(5x),\int_a^b \sin(5x)dx=$$

$$=\frac{-\cos(5x)}{5}\bigg|_a^b=\frac{-\cos(5b)+\cos(5a)}{5},\left|\int_a^b \sin(5x)dx\right|\le\frac{1+1}{5}=0.4.\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\infty\cdot\infty}=0.$$

$$(\frac{1}{x\ln x})'=-\frac{\ln x+x\cdot(1/x)}{(x\ln x)^2}=-\frac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}.(f'<0)\leftrightarrow(x>(1/e))$$

לכן האינטגרל מתכנס לפי משפט דיריכלה להתכנסות אינטגרלים לא אמיתיים.

6

$$(\frac{1^7+2^7+3^7+\cdots+n^7}{n^8})=\frac{1}{n}((\frac{1}{n})^7+(\frac{2}{n})^7+\ldots+(\frac{n}{n})^7)$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1^7+2^7+3^7+\cdots+n^7}{n^8})=\int_0^1 x^2dx=\frac{x^8}{8}\bigg|_0^1=\frac{1-0}{8}=\frac{1}{8}.$$

7. א

$a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(n!)^2(2n+2)!}=\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{n+1}{2(2n+1)}.\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{4}<1$ הטור

מתכנס לפי מבחן ד'אלמברט

ב: $a_n=n^2\cdot\sin^3\frac{1}{n},b_n=\frac{1}{n},\frac{a_n}{b_n}=\frac{n^2\cdot\sin^3\frac{1}{n}}{1/n}=\frac{\sin^3\frac{1}{n}}{1/n^3}=(\frac{\sin(1/n)}{1/n})^3.\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n})=1$.

לפי משפט השואת הגבול הטור מתבדר כי הטור ההרמוני מתבדר.

ג.

$$\sum_{n=2}^\infty(\frac{2n^2-3}{2n^2+5})^{n^3}.\sqrt[n]{a_n}=(\frac{2n^2-3}{2n^2+5})^{n^2}.\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=?,(\frac{2n^2-3}{2n^2+5}-1)n^2=\frac{-2n^2}{2n^2+5}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^{-1}<1$$

הטור מתכנס לפי מבחן השרש.

ד: $a_n=(-1)^n\frac{\sin(n!)\sqrt{n}}{n^2\cdot\ln n},|a_n|\le\frac{1\cdot\sqrt{n}}{n^2\cdot\ln n}=\frac{1}{n^{1.5}\cdot\ln n}\le\frac{1}{n^{1.5}}.$ כיון שטור האיברים

בהחלט מתכנס, הטור מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

:

ה: $a_n=\frac{(\ln n)^2}{2n}>\frac{1}{2n}$ והטור גדול מטור מתבדר ולכן בעצמו מתבדר.