

המכללה האקדמית נתניה

מבחן סוף באינפי ב' מועד ב'

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה
תאריך הבחינה: יום ד כד כסלו התשע"ד 27-11-2013
משך הבחינה: שלוש שעות
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

ענה על כל השאלות הבאות:

1. א. נסח והוכח את מבחן ראבה להתכנסות טורים חיוביים. (20%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא (אין צורך לחשב את הסכום):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot n!}{(\pi + 1)(\pi + 2)(\pi + 3) \cdots (\pi + n)}$$

2. חשב את האינטגרל הבא: (10%)

$$\int \frac{7x^2 - 8x + 3}{(x^2 + 1)(x - 2)} dx$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות: (10%)

$$g(x) = 2x^3 + 15x^2 - 9x \quad \text{ו} \quad f(x) = x^4 + 4x^3 - 9x$$

4. חשב את אורך העקומה $8(1 - 2x^2)y + x^6 = 0$ בתחום $1 \leq x \leq 4$ (10%)

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: (10%)
נמק. $\int_2^{\infty} \frac{3x \cdot \sin(7x)}{x^2 - 1} dx$

6. בדוק התכנסות ארבעה מחמשת הטורים הבאים. (אין צורך לחשב את הסכום): נמק. (40%)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 4^n} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{\left(\frac{2n+6}{2n+8}\right)^n} \quad \text{ב.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n \quad \text{ג.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^5(n^n)}{n^2 + 7} \quad \text{ד.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\ln n)^3} \quad \text{ה.}$$

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ (הוא $a \neq 0$) הוא $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ב. פירוק הטרינום $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \quad \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, \quad a^0 = 1,$$

$$(a^x)^y = a^{xy}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים. הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו- $0 < a, a \neq 1$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x, \quad \ln x = \log_e x, \quad e = 2.718281828\dots$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5. הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (e^x)' = e^x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידיים

$$\int 0 dx = C;$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C;$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \arctan x + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx;$$

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx;$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

אינטגרציה בחלקים בנוסח אחר:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א. שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\varphi) d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

11.

א. הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta). \quad :$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2 \cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha) \sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot n!}{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3) \cdots (\pi+n)}, a_n = \frac{4 \cdot n!}{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3) \cdots (\pi+n)},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4 \cdot (n+1)!}{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3) \cdots (\pi+n)(\pi+n+1)} = \frac{n+1}{\pi+n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \cdot n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left(\frac{\pi+n+1}{n+1} - 1 \right) = \frac{\pi n}{n+1}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \pi > 1$$

הטור מתכנס לפי מבחן ראבה.

2 תרגיל

$$\int \frac{7x^2 - 8x + 3}{(x^2 + 1)(x - 2)} dx, \frac{7x^2 - 8x + 3}{(x^2 + 1)(x - 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 2} \cdot (Ax + B)(x - 2) + C(x^2 + 1) = 7x^2 - 8x + 3.$$

$$(A + C)x^2 + (B - 2A)x + (C - 2B) = 7x^2 - 8x + 3, 5C = 15, C = 3, A = 4, B = 0. \int \frac{7x^2 - 8x + 3}{(x^2 + 1)(x - 2)} dx =$$

$$= \int \left(\frac{4x}{x^2 + 1} + \frac{3}{x - 2} \right) dx = 2 \ln(x^2 + 1) + 3 \ln |x - 2| + C$$

3. תרגיל 3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 9x, g(x) = 2x^3 + 15x^2 - 9x. f(x) = g(x) \rightarrow x^4 + 2x^3 - 15x^2 = x^2(x - 3)(x + 5) = 0.$$

$$f(1) = -4 < g(1) = 8, f(-1) = 6 < g(-1) = 22. S = \int_{-3}^5 (15x^2 - x^4 - 2x^3) dx. H(x) = 5x^3 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + C.$$

$$S = H(5) - H(-3) = 625$$

4. תרגיל

$$8(1 - 2x^2y) + x^6 = 0 \rightarrow 8(2x^2y - 1) = x^6 \rightarrow 2x^2y = 1 + \frac{x^6}{8} \rightarrow y = \frac{1}{2x^2} + \frac{x^4}{16} \rightarrow y' = -\frac{1}{x^3} + \frac{x^3}{4}$$

$$\rightarrow (y')^2 = \frac{x^6}{16} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{2} \rightarrow (y')^2 + 1 = \frac{x^6}{16} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{x^3} + \frac{x^3}{4} \right)^2, l = \int_1^4 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{x^3}{4} \right) dx = \left(\frac{-1}{2x^2} + \frac{x^4}{16} \right) \Big|_1^4 =$$

$$= \frac{256 - 1}{16} - \frac{\left(\frac{1}{16} - 1 \right)}{2} = \frac{510 - 1 + 16}{32} = \frac{525}{32}$$

תשובה 5

$$\int_2^{\infty} \frac{3x \cdot \sin(7x)}{x^2 - 1} dx, \frac{3x \cdot \sin(7x)}{x^2 - 1}, f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}, g(x) = \sin(7x). f'(x) = \frac{3(x^2 - 1) - 6x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-3(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} < 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{2x} = \frac{3}{\infty} = 0, \left| \int_a^b \sin(7x) dx \right| = \left| \frac{-\cos(7x)}{7} \Big|_a^b \right| = \left| \frac{\cos(7a) - \cos(7b)}{7} \right| \leq \frac{2}{7}.$$

6. בדוק התכנסות ארבעה מחמשת הטורים הבאים. נמק. (40%)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 4^n} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{\left(\frac{2n+6}{2n+8}\right)^n} \quad \text{ב.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n \quad \text{ג.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^5(n^n)}{n^2 + 7} \quad \text{ד.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\ln n)^3} \quad \text{ה.}$$

תשובה 6

סעיף א

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 4^n}, a_n = \frac{n^n}{n! \cdot 4^n}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)! \cdot 4^{n+1}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{4(n+1)n^n} = \frac{1}{4} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{4}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{4} < 1$$

הטור מתכנס לפי כלל המנה של דיאלמברט.

סעיף ב

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{\left(\frac{2n+6}{2n+8}\right)^n}, \left(\frac{2n+6}{2n+8}\right)^n = \left(1 - \frac{2}{2n+8}\right)^n, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2n+8} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{\left(\frac{2n+6}{2n+8}\right)^n} = \frac{7}{e^{-1}} = 7e.$$

כיון שהאיבר של הסדרה איננו שואף ל-0, אז הטור של הסדרה איננו מתכנס.

סעיף ג

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ מתכנס כי } a_n = \frac{(-1)^n}{n}, b_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n \text{ נגדיר } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$$

לפי משפט לייבניץ, הסדרה $b_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ עולה וחסומה, ולכן לפי קריטריון אבל

הטור מתכנס.

סעיף ד

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^5(n^n)}{n^2+7}, a_n = (-1)^n \frac{\sin^5(n^n)}{n^2+7}, |a_n| \leq \frac{1}{n^2+7}, b_n = \frac{1}{n^2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{b_n} = 1.$$

כיון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, אז לפי מבחן השואת הגבול הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, כלומר הטור שעליו שאלו מתכנס בהחלט.

סעיף ה

$$1 \leq (\ln n)^3 \rightarrow n^2 \leq n^2 (\ln n)^3 \rightarrow \frac{1}{n^2 (\ln n)^3} \leq \frac{1}{n^2}$$