המכללה האקדמית נתניה

מבחן באינפי ב' מועד ב'

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה

תאריך הבחינה: יום ג,י"א מרחשון התשע"ב 8-11-2011

משך הבחינה: שלוש שעות

חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. א. נסח **<u>והוכח</u>** את המבחן האינטגרלי להתכנסות טורים חיוביים. (20%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: $\sum_{n=7}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln(n)\cdot\ln(\ln(n))}$

2. מצא את הגבול הבא: (10%)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left(\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\cos\frac{3\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות: (10%)
$f(x)=x\sqrt{x}-x$ ו $g(x)=4x-4\sqrt{x}$

4. חשב את אורך הקשת של העקומה $x^2=(3y)^{\frac{2}{3}}-2$ (10%)
בתחום: $1\le x\le 4$.

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: $\int_1^{\infty}\sin(x^2)dx$ נמק. (10%)

רמז : השתמש בהצבה : $t = x^2$

6. ענה על ארבעה מתוך חמשת הסעיפים הבאים. בדוק התכנסות הטורים הבאים. נמק . (40%)

א : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!) \cdot 2^n}{n^n}$

ב : $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 \cdot \sin^3 \frac{1}{n}$

ג : $\sum_{n=1}^{\infty} [\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}] \cdot \frac{1}{n^2}$

ד : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+5)^n}{(3n-1)^n}$

ה : $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n) \cdot \ln(n+1)}$

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $\left(a\neq 0\right)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x,e=2.718281828\ldots$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)'=ax^{a-1},\qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$
$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$
$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

11.

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$:
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$:
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$:
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות.

1-ב נביט בפונקציה x, היא חיובית ועולה עבור 0<x, נביט בפונקציה ln(x),
היא חיובית ועולה עבור 1<x. נביט ב ln(ln(x)) היא חיובית ועולה עבור e<x.
אז המכפלה xln(x)ln(ln(x)) היא חיובית ועולה עבור e<x, ולכן הסדרה של
הטור חיובית ויורדת. כמו כן $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\cdot\ln(x)\cdot\ln(\ln(x))}=0$, ולכן אפשר להשתמש
במבחן האינטגרל . ואכן

$$I=\int_{e^e}^{a}\frac{dx}{x\cdot\ln(x)\cdot\ln(\ln(x))}=?,u=\ln(\ln(x)),du=\frac{dx}{x\cdot\ln(x)},I=\int_{1}^{\ln(\ln(a))}\frac{du}{u}=\ln(u)\Big|_1^{\ln(\ln(a))}=\ln(\ln(\ln(a)))-0.$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_{e^e}^{a}\frac{dx}{x\cdot\ln(x)\cdot\ln(\ln(x))}=\lim_{a\to\infty}\ln(\ln(\ln(a)))=\infty$$

כלומר האינטגרל מתבדר ולכן גם הטור.

-2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}(\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\cos\frac{3\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}))=\int_0^{\pi/2}\cos(x)dx=$$
$$=\sin(x)\Big|_0^{\pi/2}=\sin(\pi/2)-\sin(0)=1.$$

-3

$$f(x)=x\sqrt{x}-x,g(x)=4x-4\sqrt{x}.f=g\to x\sqrt{x}-x=4x-4\sqrt{x}\to x\sqrt{x}-5x+4\sqrt{x}=0\to$$
$$\sqrt{x}(x-5\sqrt{x}+4)=0\to\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-4)=0\to\sqrt{x}=0,1,4\to x=0,1,16,$$
$$g(0.25)=-1<f(0.25)=-0.125,\ f(4)=4<g(4)=8,S=\int_0^1(x\sqrt{x}-5x+4\sqrt{x})dx-\int_1^{16}(x\sqrt{x}-5x+4\sqrt{x})dx.$$
$$h(x)=\frac{2\sqrt{x^5}}{5}-\frac{5x^2}{2}+\frac{8\sqrt{x^3}}{3},S=2h(1)-h(0)-h(16)=\frac{4}{5}-5+\frac{16}{3}-0-\frac{2048}{5}+640-\frac{512}{3}=$$
$$=-\frac{496}{3}-\frac{2044}{5}+635=635-165-\frac{1}{3}-409-\frac{3}{5}=61-\frac{14}{15}=60+\frac{1}{15}$$

4-נחלץ ונקבל

$$x^2=(3y)^{\frac{2}{3}}-2\to3y=(x^2+2)^{\frac{3}{2}}\to y=(x^2+2)^{\frac{3}{2}}/3\to y'=\frac{3(x^2+2)^{\frac{1}{2}}2x}{2\cdot3}=x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$$
$$,\to(y')^2=x^2(x^2+2)=x^4+2x^2\to(y')^2+1=x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2,l=\int_1^4\left(x^2+1\right)dx=$$
$$=(\frac{x^3}{3}+x)\Big|_1^4=\frac{64-1}{3}+(4-1)=24.$$

5-נשתמש בהצבה ונקבל

$$I=\int_1^\infty \sin(x^2)dx, u=x^2, du=2xdx, dx=\frac{du}{2\sqrt{u}}, I=\int_1^\infty \frac{\sin(u)dx}{2\sqrt{u}}, f(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}, g(u)=\sin(u),$$

$$f'(u)=\frac{-1}{4\sqrt{u^3}}<0, \lim_{u\to\infty} f(u)=0, \int_0^x \sin(u)du=-\cos(u)\Big|_0^x=1-\cos(x), \left|\int_0^x \sin(u)du\right|\le 1+|\cos(x)|\le 2$$

קבלנו כי האינטגרנד הוא אינטגרל של מכפלה, f חיובית ויורדת ל-0, g מקיימת כי האינטגרל שלה חסום, ולכן מתקיימים תנאי משפט דיריכלה והאינגרל מתכנס.

6-א

נשתמש במבחן המנה של ד'אלמברט ונקבל

$$\sum_{n=1}^\infty a_n, a_n=\frac{(n!)\cdot 2^n}{n^n}, \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!\cdot 2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!\cdot 2^n}=\frac{n^n\cdot 2}{(n+1)^n}=\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}, \lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$$

ולכן הטור מתכנס לפי מבחן ד'אלמברט.

6-ב נשתמש במבחן השואת הגבול עבור $\sum_{n=2}^\infty n^2\cdot\sin^3\frac{1}{n}$ ונקבל

$$a_n=n^2\cdot\sin^3\frac{1}{n}, b_n=\frac{1}{n}, \frac{a_n}{b_n}=\frac{n^2\cdot\sin^3\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\frac{\sin^3\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}=\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^3, \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^3=?, x=\frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^3=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3=1^3=1$$

ולכן לפי מבחן השואת הגבול, ומכיון ש $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n}$ מתבדר, אז גם $\sum_{n=2}^\infty n^2\cdot\sin^3\frac{1}{n}$ מתבדר.

6-ג

עבור $\sum_{n=1}^\infty \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right]\cdot\frac{1}{n^2}$ נשתמש במבחן ד'אלמברט.

$$a_n=[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}]\cdot\frac{1}{n^2},\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}]\cdot\frac{1}{(n+1)^2}[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}]\cdot n^2=\frac{n^2(2n+3)}{(n+1)^2(2n+2)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.$$

נשתמש במבחן ראבה ונקבל

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n(\frac{(n+1)^2(2n+2)}{n^2(2n+3)}-1)=n(\frac{(n+1)^2(2n+2)-n^2(2n+3)}{n^2(2n+3)})=\frac{2n^3+6n^2+6n+2-2n^3-3n^2}{n(2n+3)}=\frac{3n^2+6n+2}{n(2n+3)},$$

$$\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\frac{3}{2}.$$

לפי מבחן ראבה הטור מתכנס.

6-ד עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+5)^n}{(3n-1)^n}$ נעבור לטור המוחלט $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+5)^n}{(3n-1)^n}$. עבורו

נשתמש במבחן השורש של קושי ונקבל $a_n=\frac{(2n+5)^n}{(3n-1)^n},\sqrt[n]{a_n}=\frac{2n+5}{3n-1},\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{2}{3}$

ולכן הטור מתכנס בהחלט לפי מבחן קושי ולכן הטור המקורי מתכנס.

6-ה עבור הטור $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)\cdot\ln(n+1)}$ נקבל

$a_n=\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)\cdot\ln(n+1)}=\frac{\ln(\frac{n+1}{n})}{\ln(n)\cdot\ln(n+1)}=\frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\ln(n)\cdot\ln(n+1)}=\frac{1}{\ln(n)}-\frac{1}{\ln(n+1)}$. ולכן

נקבל $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln(k)}-\frac{1}{\ln(k+1)}=1-\frac{1}{\ln(n+1)},\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}S_n=1$ כלומר הטור

מתכנס וסכומו 1.